公立大学中期日程

2024年度

<工　学　部>

数　学　問　題

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で11ページ，解答用紙は全部で3枚である．脱落のあった場合には申し出ること．

3　すべての解答用紙の所定欄に，それぞれ受験番号（左右2箇所），氏名を必ず記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある．

6　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．

7　解答終了後，配付された解答用紙はすべて提出すること．

8　問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

9　問題冊子は持ち帰ること．

（余　　白）

第　1　問（40点）

（**第 1 問** の問 1，問 2，問 3 については解のみを記入すること.）

α を 0 でない実数とし，xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(3,\ -1)$, $\mathrm{B}(2\alpha,\ \alpha)$ を考える．さらに，$\mathrm{P}(\beta,\ \gamma)$ を以下の (i)，(ii) がともに成り立つ xy 平面上の点とする.

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は平行である.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ は垂直である.

ただし，零ベクトルは任意のベクトルと垂直であり，かつ平行であるものとみなす．このとき，以下の問いに答えよ.

問 1　β および γ をそれぞれ α の式で表せ.

問 2　線分 OB の長さと線分 AP の長さが一致するときの α の値を求めよ.

問 3　$\alpha > 2$ とする．線分 OB の長さが線分 AP の長さの 2 倍であるときに，四角形 OAPB の面積を求めよ.

（余　　白）

第　2　問　（50点）

（ **第 2 問** の問 1，問 2，問 3，問 4 については解のみを記入すること.）

i は虚数単位とし，θ は実数として，複素数 z を $z = \sqrt{3}\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ で与える．また，複素数 w を $w = (z+1)^2$ で定め，w の実部を u，虚部を v とする．このとき，以下の問いに答えよ．

問 1　w が実数となる z をすべて求めよ．

問 2　$|w| < 1$ となる θ の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲内で答えよ．

問 3　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を θ が動くとき，u のとり得る値の範囲を求めよ．

問 4　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を θ が動くとき，v のとり得る値の範囲を求めよ．

（余　　　白）

第　3　問（50点）

（ **第 3 問** の問 1，問 2，問 3，問 4 については解のみを記入すること．）

1 から 10 までの 10 枚の番号札が入っている袋がある．この袋の中身をよくかき混ぜた後，2 枚の番号札を袋から取り出し，それらの番号の和を記録し，取り出した番号札を袋に戻す試行を S とする．このとき，以下の問いに答えよ．

問 1　試行 S を 1 回行うとき，記録されている数字が偶数である確率を求めよ．

問 2　試行 S を 3 回続けて行うとき，2 個以上の偶数が記録されている確率を求めよ．

問 3　試行 S を 100 回続けて行うとき，$0 \leqq k \leqq 100$ を満たす整数 k に対して，ちょうど k 個の偶数が記録されている確率を p_k とおく．$1 \leqq k \leqq 100$ のとき，確率の比 $\dfrac{p_k}{p_{k-1}}$ を k の既約分数式で表せ．

問 4　問 3 で定めた p_k が最大となる k の値を求めよ．

（余　　白）

第　4　問（50点）

（**第 4 問** の問 1，問 2，問 3，問 4 については解のみを記入すること.）

θ を媒介変数とする次の曲線 C を考える.

$$C \ : \ x = \theta + \sin\theta, \quad y = 2 + \cos\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq a)$$

ただし，a は正の実数とする．このとき，以下の問いに答えよ.

問 1　異なる 2 点 $(0,\ 3)$, $(a + \sin a,\ 2 + \cos a)$ を通る直線を ℓ とする. 直線 ℓ と直線 $x = a + \sin a$ および x 軸，y 軸によって囲まれた四角形の面積 $A(a)$ を求めよ.

問 2　曲線 C と直線 $x = a + \sin a$ および x 軸，y 軸によって囲まれた図形の面積 $B(a)$ を求めよ.

問 3　$A(a)$, $B(a)$ はそれぞれ問 1，問 2 で定めたものとする．a が $0 < a \leqq 3\pi$ の範囲を動くとき，$B(a) - A(a)$ の最大値を求めよ.

問 4　$A(a)$, $B(a)$ はそれぞれ問 1，問 2 で定めたものとし，n を自然数とする．このとき，$A(a) = B(a)$ となる a は $0 < a < n\pi$ の範囲内にいくつあるか答えよ.

（余　　白）

第　5　問 （50点）

（ **第 5 問** の問 3 については解のみを記入すること.）

a を $a > 1$ となる実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x}{a^x} - \frac{1}{a}$$

と定める．また，$f(x)$ の最大値を $M(a)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ.

問 1　　$M(a)$ を求めよ.

問 2　　$M(a) \geqq 0$ を示せ.

問 3　　極限値 $\displaystyle\lim_{a \to e} \frac{M(a)}{(a-e)^2}$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．なお，必要があれば次の等式を用いてもよい.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

（余　　白）