

2024年度

数 学 問 題

現代システム科学域〔知識情報システム学類，学域募集（英・数型）〕
・理学部・工学部・農学部・獣医学部・医学部医学科

注 意 事 項

- 1 問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で8ページ，解答用紙は全部で4枚である。脱落のあった場合には申し出ること。
- 3 解答用紙の各ページ所定欄に，それぞれ受験番号（最後のページは，左右2箇所），氏名を必ず記入すること。なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさず解答すること。
- 4 解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答以外のことを書いたときは，該当箇所の解答を無効とすることがある。
- 6 解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない。
- 7 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
- 8 問題冊子は持ち帰ること。

(余 白)

第 1 問 (50点)

次の問いに答えよ.

問 1 $x \geq 0$ に対して, $x - \frac{x^2}{2} \leq \sin x$ が成り立つことを示せ.

問 2 自然数 n に対して, a_n を

$$a_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \sin \frac{3}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n}{n^2}$$

と定めるとき, 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.

問 3 α を実数とする. 自然数 n に対して, b_n を

$$b_n = n^\alpha \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

と定めるとき, 数列 $\{b_n\}$ が収束するような α の値の範囲とそのときの極限值を求めよ.

(余 白)

第 2 問 (50点)

b, c は実数で $c > 0$ とする. 4次方程式 $x^4 + bx^2 + c^2 = 0$ について, 次の問いに答えよ.

問 1 4 個の相異なる虚数解をもつための b と c の条件を求めよ.

問 2 問 1 で求めた条件の下で, 二重根号を用いずに 4 個の解を表せ.

問 3 問 2 で求めた 4 個の解が, 複素数平面上の同一円周上にあるための b と c の条件を求めよ.

問 4 問 2 で求めた 4 個の解が, 複素数平面上の同一直線上に等間隔に並ぶための b と c の条件を求めよ.

(余 白)

第 3 問 (50点)

固定された直線に円が接しながら滑ることなく回転するとき、円周上の定点が描く曲線をサイクロイドというが、その類似として、固定された半円に線分が接しながら滑ることなく回転するとき、線分上の定点が描く曲線を考える。すなわち、 xy 平面の単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の $y \geq 0$ の部分にある半円を C とし、長さ π の線分 AB が半円 C に接しながら滑らずに動くとする。始めに点 A は $(1, 0)$ 、点 B は $(1, \pi)$ の位置にあり、点 B が $(-1, 0)$ に到達したときに動きを止めるものとし、この間に点 A が描く xy 平面上の曲線を L とする。次の問いに答えよ。

問1 不定積分 $\int \theta \sin a\theta d\theta$ と $\int \theta^2 \cos a\theta d\theta$ をそれぞれ求めよ。ただし、 a は正の定数とする。

問2 半円 C と線分 AB の接点が $(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) のときの点 A の座標を求めよ。

問3 曲線 L と x 軸および直線 $x = -1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(余 白)

第 4 問 (50点)

以下の条件を満たす実数 a, p, q を考える.

$$\begin{cases} 5p^2 + 2p = q^2 + 5q \\ q = ap \\ pq \neq 0 \end{cases}$$

次の問いに答えよ.

問1 $a \neq \pm\sqrt{5}$ のとき, p と q をそれぞれ a を用いて表せ.

問2 a は有理数で, $a = \frac{m}{k}$ と既約分数で表示されているとする. ただし, k は自然数, m は整数とする.

1. $5m - 2k$ が $5k^2 - m^2$ の倍数ならば, p と q はともに整数であることを証明せよ.
2. 逆に, p と q がともに整数ならば, $5m - 2k$ は $5k^2 - m^2$ の倍数であることを証明せよ.
3. p と q がともに整数ならば, 121 は $5k^2 - m^2$ の倍数であることを証明せよ.