

4次元における微分トポロジー ～エキゾチック (Exotic) な曲面～

名前 磯田北斗

所属 大阪市立大学大学院理学研究科 M2

研究内容

- 「 \cong 」 位相同相を表す記号
- 「 \approx 」 微分同相を表す記号

現在の自分の研究テーマは『4次元における微分トポロジー』です。以下で現在、自分が学びたいと思っている内容を簡単にまとめさせていただきます。

1 はじめに～エキゾチックな曲面とは

エキゾチック、それは位相同相でありながら微分同相でない図形のことである。

微分同相であれば位相同相である。これは定義より自明である。しかし逆は、一般にはいえない。このことは定義より自然と予想される。微分同相の方が条件として厳しいからである。しかしながら実際に、そのような多様体を知っているであろうか。その具体例がエキゾチックな曲面なのである。

2 位相同相と微分同相

位相同相とは連続函数によって座標変換が可能であることをいう。

一方、微分同相とは C^∞ 級函数 (∞ 回微分可能な函数) によって座標変換が可能であることをいう。

さて、微分トポロジーの起源はミルナーの功績までさかのぼることになる。1956年、J. ミルナーは通常の7次元球面 S^7 と異なる7次元球面を発見した。 S^7 と位相同相でありながら微分同相でない球面。これが今日のエキゾチック球面である。このような球面は7次元以上でも発見され、現在、各次元で何個存在するかまでわかっている。例えば、 S^7 は28個 (通常の S^7 も含めて) 存在する。

このように位相同相でありながら、異なる微分構造を持つ多様体が存在する。この事実によって微分トポロジーという新たな分野が開くことになる。

3 4次元におけるエキゾチック

エキゾチックな球面が何個存在するのか? これはある次元を除いて、全ての次元で解明された。ただ一つ、4次元のみが未解明なのである。

そして、4次元においては一つ衝撃的な事実が発見されている。

それは

エキゾチックな \mathbb{R}^4 が存在する

ということである。

エキゾチックな \mathbb{R}^n に関しては $n = 4$ の時しか存在しないことがわかっている。

唯一（エキゾチックの）存在が未解明の S^4 と唯一（エキゾチックが）存在する \mathbb{R}^4 。このことが4次元の特殊性といえるであろう。

この4次元の不可解さについて、より深く触れてみたい。現在、それを目標に研究しているところです。

参考文献

- [1] 幾何学をみる～次元からのイメージ ト部東介 大森英樹 松本幸夫著 遊星社
- [2] エキゾチックな球面 野口宏著 ダイヤモンド社
- [3] 4次元のトポロジー 松本幸夫著 日本評論社