変換群の位相幾何学的研究 (GKMグラフのグラフコホモロジー)

黒木慎太郎*

トーラス作用の同変コホモロジー環を計算する際、軌道の 1 スケルトン（一次元軌道全体の閉包）へ制限した作用の同変コホモロジーを計算すれば十分な場合があります。更に不動点が離散的で、その近傍で pairwise linearly independent な作用であれば、GKM グラフと言う（$t^* \simeq H_T^2(pt)$ に値を持つ）ラベル付きの n-価グラフが構成できます。

逆に、GKM グラフそのものより定義できる、環（**グラフコホモロジー**）

$$H_T^*(\Gamma) = \{f : V^\Gamma \to H_T^*(pt) | f(p) - f(q) = 0(\mathrm{mod}\alpha_{pq})\}$$

と同変コホモロジーが同型であることが知られています。ここで、V^Γ は GKM グラフ Γ の頂点の集合、$\alpha_{pq} \in H_T^2(pt)$ は辺 pq 上のラベルとします。

グラフコホモロジーの環構造をグラフの組み合わせ構造から計算できるか？と言う問題があります。トーラスグラフと呼ばれる GKM グラフに関してのみ答えはすでに知られていました。そこで私はハイパートーラスグラフと言う GKM グラフを定義し、そのグラフコホモロジーの環構造を（特別な場合に）与えました。この GKM グラフは、ハイパートーリックと呼ばれる 4n 次元多様体上の n+1 次元トーラス作用からできる GKM グラフやトーラス多様体の双対バンドル上への n+1 次元トーラス作用から得られる GKM グラフ等を含みます（正確に言うと後者の場合の環構造についての研究は working on progress です）。

*Department of Mathematics, Osaka City University, Sumiyosi-Ku, Osaka 558-8585, Japan. The author is supported by Fellowship of the Japan Society for the Promotion of Science. email:d03sa004@ex.media.osaka-cu.ac.jp