ベクトル束について

住田　佑介　（東京大学大学院数理科学研究科 M1）

１ ベクトル束

定義　Ｂ上の実ベクトル束ξ

０）位相空間Ｂを定め、底空間と呼ぶ。

１）全空間Ｅという位相空間Ｅ(ξ)

２）射影と呼ばれる写像π：Ｅ　→　Ｂが定義される

３）∀b∈Ｂ　に　$\pi^{-1}(b)$　実数上のベクトル空間の構造が定まる

４）これら条件が以下の局所自明性条件を満たす。

局所自明性条件

$\forall b \in \mathbf{B}$ $b \in \exists \mathbf{U} \subset \mathbf{B}$ $\exists n \geqq 0$ $\exists h : \mathbf{U} \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(\mathbf{U})$ *homeo*

s.t $\forall u \in \mathbf{U}$ $x \to h(u,x)$ が$\mathbf{R}^n$，$\pi^{-1}(u)$間の同型を定義する。

$\pi^{-1}(u)$ を u 上の fiber と呼び、$\mathbf{F}_b$と表記する。

つまりＢ上の各点に対しＥという位相空間が定まり、局所的にＢ上の点に関して h の連続性が成り立ち、かつまた b が固定されたときに$\mathbf{R}^n$，$\pi^{-1}(u)$間で h は同型となる。

重要なベクトル束の例として、B,E が smooth manifold でπが smooth map で h が diffeomorphism になるとき可微分ベクトル束というが、M の接束(tangent bundle)がその例である。接束は M を底空間とし各 fiber を各点における接ベクトル空間として定義されていく。

２ ベクトル束の簡単な性質

局所自明性におけるＵとして底空間全体Ｂが選べるとき、自明束という。

自明束ではない例として、$[0,\pi] \times \mathbf{R}$でつくったメビウスの帯は自明にならない。また、底空間を円周とし、その上の$\mathbf{RP}^2$も自明束ではない。このように自明束というのは「捻れていない」という直感的理解ができる。実際の証明としては$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{R}$と同相ではないことを示せばよい。$\mathbf{RP}^2$が底空間の場合については、これをハンドル分解するとメビウスの帯の境界と閉円板の境界で貼り合わせたものとわかるので、ここから自明ではないとわかる。

３ 今後

このベクトル束の底空間と適当な係数を用いてつくられる特異コホモロジー群から、シュティーフェル・ホイットニー類という特性類が定義され空間の捻れ方などの状態がわかっていく。今後はこの特性類を道具として、空間の分類などを考えていきたい。