Khovanov homology of knots and links

東京大学大学院数理科学研究科修士課程１年　鈴木亮平*1

1 Introduction

Khovanov [1] は Jones polynomial を拡張し, oriented link に対する colomology invariant で, その graded Euler characteristic が (unnormarized) Jones polynomial $\hat{J}(L)$ に一致するようなものを構成した.

これは Jones polynomial より真に強い不変量である. (例えば, 5_1 と 10_{132} の Jones polynomial は一致するが, その Khovanov homology は同型ではない.[2])

Khovanov 自身の定義はかなり categorical で, 直感的にわかりづらいので, ここでは Bar-Natan [2] の解説をさらに端折りながら紹介する.

2 Rough definition

L を oriented link, D をその diagram としよう. D の state s とは, 関数 $s : \{\text{crossings of } D\} \to \{0, 1\}$ のこととする. (あるいは, n-dimentional cube $[0, 1]^n$ の頂点. ただし, $n = \#\{\text{crossing of } D\}$) D の各 state に対応して各交点の resolution をとったものを D_s とし, graded $\mathbb{Z}$-module V_s を,

$$V_s = V^{\otimes |D_s|}\{|D_s|\}$$

で定義する. ここで, $|D_s|$ は D_s のもつ単純閉曲線の数, V は degree ± 1 を持つ元 $v_\pm$ で生成される graded $\mathbb{Z}$-module (i.e. $V = \mathbb{Z}v_+ \oplus \mathbb{Z}v_-$), $\{k\}$ は degree を k ずらすことを表す (i.e. $M\{k\}_j = M_{j-k}$).

これらを $|s| = \#s^{-1}(1)$ ごとにまとめて, cochain complex $C(D)$ を,

$$\overline{C}^i(D) := \bigoplus_{s:|s|=i} V_s$$

$$C(D) := \overline{C}(D)[-n_-]\{n_+ - 2n_+\}$$

と定めれば, この complex の graded Euler characteristic

$$\chi(C(D)) = \sum_i (-1)^i \sum_j q^j \dim C^i_j(D) \otimes \mathbb{Q}$$

は (その構成から明らかに) unnormalized Jones polynomial と一致する.*2　ここで, $n_{+(-)} = \#\{\text{over(under)crossing}\}$, $[k]$ は complex の添え字を k ずらすことを表す (i.e. $C[k]^i = C^{i-k}$).

この complex の differencial は (詳細は省くが) 以下のように定義される.

まず, あるひとつの成分を除いて一致している 2 つの state $s = (\dots, 0, \dots), s' = (\dots, 1, \dots) \in \{0, 1\}^n$ に対して, V_s と $V_{s'}$ の間に degree-preserving map $f^s_{s'}$ をつくる. これは本質的には次のいずれかに恒等写像を tensor したものになる.

$$m : V \otimes V \to V(\text{product}) : v_+ \oplus v_+ \mapsto v_+, v_\pm \oplus v_\mp \mapsto v_-, v_- \oplus v_- \mapsto 0$$
$$\Delta : V \to V \otimes V(\text{coproduct}) : v_+ \mapsto v_+ \oplus v_- + v_- \oplus v_+ v_- \mapsto v_- \oplus v_-$$

*1 rsuzuki@ms.u-tokyo.ac.jp

*2 Jones polynomial の状態和による定義とほとんど同じことをしているから.

これらをまとめて, $x \in V_s, |s| = i$ に対し,

$$d^i x = \sum_{s'} (-1)^{\#} f^s_{s'} x$$

とおく. $(-1)^{\#}$ を適当に[*3]定めることにより, これは $d \circ d = 0$ を満たす.

こうして定義された $(C(D), d)$ の cohomology を $\mathcal{H}(D)$ と書く. これは Reidemister move で不変であることが示されるので, oriented link L の invariant である. よってこれを $\mathcal{H}(L)$ と書く. cohomology をとる操作で graded Euler characteristic は不変なので, $\chi(\mathcal{H}(L)) = \hat{J}(L)$ が言える.

3 Interests

- 具体的な link L に対する $\mathcal{H}(L)$ の簡明な計算公式
  —例えば, (p, q)-torus link.($p = 2$ は比較的楽に出来る.)
- 様々な操作 (向きの反転, 鏡映, 連結和,mutation など) をとったときの挙動
  —例えば残念ながら knot の向きの反転は検出できない.(この点は Jones polynomial と同じ.)
- $\mathcal{H}(L)$ と他の不変量の関係
  —まだ他の不変量についてあまりよく知らないので, これから補っていくつもり.

参考文献

[1] M. Khovanov "A categorification of the Jones polynomial", Duke Math. J. 101 (2000) no.3, 359-426.
http://xxx.lanl.gov/abs/math.QA/9908171

[2] D. Bar-Natan "On Khovanov's categorification of the Jones polynomial", Algebraic and Geometoric Topology 2, (2002) 337-370.
http://xxx.lanl.gov/abs/math.QA/0201043

[*3] 例えば $\# = \{j | j < i, s(j) = 1\}$