ジョーンズ多項式について

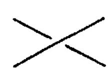
上村恭子
奈良女子大学大学院人間文化研究科
博士前期課程 数学専攻

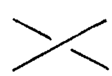
一次元球面 S^1 の三次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への埋め込みを結び目といい，互いに交わらない結び目の和を絡み目という．与えられた 2 つの絡み目が $\mathbb{R}^3$ 内の連続変形（ambient isotopy）で移りあうとき，この 2 つの絡み目は同値であるという．また同値な絡み目の異なる 2 つの図式（絡み目を平面上に描いた図）があったとき，ライデマイスター変形 I，II，III と呼ばれる 3 種類の変形を有限回施すことで，一方の図式からもう一方の図式が得られることが知られている．

与えられたいくつかの絡み目に対して，それらを区別する道具としていくつかの不変量が知られている．なかでも，結び目理論の研究の発展に大きく貢献したジョーンズ多項式について述べたい．ここではカウフマンのアプローチに沿って見ていくことにする．

ジョーンズ多項式を定義するために，まずブラケット多項式という絡み目の図式から得られる多項式を紹介する．

D を絡み目の図式とする．D の各交点に対して (i)，(ii) のいずれかの方法を用いて交点を解消し，互いに交わらない平面上の閉曲線を作ることを考える．

(i)  → 

(ii)  → 

こうして得られた新たな図式の一つ一つをステートという．一般に D の交点数が n のときは 2^n 個のステートが得られる．いま D の各ステート s に対して，次のように記号を定めておく．

$n_+(s)$: (i) を適用した交点数
$n_-(s)$: (ii) を適用した交点数
$|s|$: s に含まれる閉曲線の数

例　D を  とすると，D から得られるステートは以下の 8 個である．

定義　D を絡み目の図式とする．このとき多項式 $\langle D\rangle$ を次のように定義し，D のブラケット多項式という：

$$\langle D\rangle = \sum_s A^{n_+(s)-n_-(s)} d^{|s|-1}$$

ただし

$$d = -(A^2 + A^{-2}), \quad \langle \bigcirc \rangle = 1$$

とする．特に

$$\langle D \cup \bigcirc \rangle = d\langle D\rangle$$

である．

ブラケット多項式は絡み目の不変量になり得るかという問題を考えると，実はライデマイスター変形の II と III では不変であるが，I では不変でないことがわかる．(補題 1,2)

補題 1　D と D' を絡み目の図式とする．ライデマイスター変形 II と III で D が D' に移るとき，$\langle D\rangle$ と $\langle D'\rangle$ は同等である．

補題 2　D と D' を向き付けられた絡み目の図式とし，$w(D)$ を D のひねり数とする．ライデマイスター変形 I で D が D' に移るとき，

$$\langle D\rangle = (-A^{-3})^{w(D)}\langle D'\rangle$$

である．

そこで，次のような新しい多項式を導入する．

定義　D を向き付けられた絡み目の図式とし，$w(D)$ を D のひねり数とする．このとき多項式 $X_D(A)$ を次のように定義する：

$$X_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)}\langle D\rangle$$

このように定義すると，補題 1,2 より，ライデマイスター変形は多項式 $X_D(A)$ には何の影響も与えないことがわかる．よって絡み目の不変量になることがわかった．以降 $X_D(A)$ は個々の図式に依らないので $X_L(A)$（L は絡み目）と表す．この $X_L(A)$ の A に $t^{-\frac{1}{4}}$ を代入して得られる t の多項式が L のジョーンズ多項式である．

現在わたしはこのようなことを勉強している．今後は結び目に関する他の話題についても勉強していきたいと考えている．