研究紹介: 絡み目の様々な不変量の研究

東京工業大学　大学院理工学研究科　M2　Gengyu Zhang

有名な Jones 多項式は絡み目（結び目も含む）の不変量である．Jones 多項式は Vaughan Jones によって 1984 年に発見された．Alexander 多項式とは違って Jones 多項式は，結び目とその鏡像を区別することができる．Jones 多項式の発見は大きな興奮を呼び起こし，その後 HOMFLY 多項式の発見へとつながった．これらの結果は，DNA の組成を研究している分子生物学者も大いに興味を持った．それは，2 つの多項式の違いが核酸の変化する方法（DNA のある部分が切れたり，すれ違ったりする）に対応しているからである．

絡み目の Jones 多項式の重要性は広く知られている．低次元トポロジーの最新の話題の一つは Khovanov ホモロジーである．これは，結び目や絡み目にそのホモロジーが Jones 多項式になるような複体を対応させるものである．正確に言うと，1999 年に M. Khovanov は，各絡み目に，その Euler 標数が Jones 多項式になるような線型空間の複体を定義した．Euler 標数（ホモロジー群の階数の交代和）だけでなくホモロジー群自身も絡み目の不変量となるのである．この新しい不変量は，Jones 多項式や他の不変量と比較すると不思議なものである．D. Bar-Natan によると「非局所的で不安定であり我々が知っているすべてのものと直交している」.

Princeton大学のLeeは 1999 年に，Khovanovホモロジーは，$\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}$に収束するスペクトル系列の$E_2$項と自然にみなせることを示した．論文“Khovanov homology and slice genus (February, 2004)”において，Rasmussenはこのスペクトル系列を用いて結び目不変量$s(K)$を定義した．この論文の主結果は，この不変量が結び目の 4 次元種数の下からの評価を与えるということである．これは，「(p,q)-torus結び目の 4 次元種数は$(p-1)(q-1)/2$ である」といういわゆる“Milnor予想”を完全に組み合わせ的な方法で証明した画期的な論文である. これまでに知られていたこの予想の証明は, ゲージ理論，もっと詳しく言うとSeiberg-Witten理論という理解するのが難しい理論を使ったものであり，1991 年にKronheimerとMrowkaによって与えられた．Rasmusenは，組み合わせ的スケイン理論とある種のスペクトル系列だけを使って証明を与えた．彼は，結び目同境不変量を得たのであるが，それは本当に驚くべきものである．また，自明なAlexander多項式を持つある種の結び目がスライスではないこと（Freedmanの結果を使えばこれらが位相的にはスライスであることがわかる）を示すこともできる．よって，この不変量は 4 次元における可微分的現象と位相的現象の差を調べることができるのである.

以下に，Khovanov ホモロジーを使って解決が期待される問題を述べる.

①結び目が張る，clasp 特異点を 1 つだけ持つような向き付けられる曲面を考える．結び目 K の clasp 種数 $cg(K)$を，このような曲面の最小種数とする．例えば三葉結び目は特異点を 1 つ持つ円板の境界になるので clasp 種数は 0 である．clasp 種数は加法的か？また，$cg(K)=g(K)$となる結び目は存在するか？

②Khovanovホモロジーを使って 4 次元clasp数に関する研究を行なうことを考えている．4 次元clasp数とは，$\mathbf{R}^4$の中の穴あき円板によってつなぐことができるHopf絡み目の最小数である．よ

って，私は結び目のKhovanovホモロジーからHopf絡み目のKhovanovホモロジーへの準同型写像を構成したい. 最近の研究によるとRasmussenの仕事との差は種数gの曲面を境界成分の多い種数 0 の曲面に替えることである．これは私の研究の一つの課題である．
③もう一つの研究は，Lee が定義した(1,4)-境界写像（ここでは 2 重次数が付いた鎖複体を考えている）から誘導されるスペクトル系列は正確には何か，そして（交代結び目だけでなく）すべての結び目に対してそのスペクトル系列は容易に理解できるか，と言うことである．

3 次元球面S^3の結び目Kに，連結でコンパクトな曲面Fを張ることができる．特に，Fは向き付けられるようにでき，KのSeifert曲面と呼ばれる．Kの種数$g(K)$はSeifert曲面の種数の最小数である．もし，Fを向き付けられない曲面とすることにより（例えばSeifert曲面に半ひねりの帯をつければよい），Kの*crosscap*数が，Kの張る向き付けられない曲面の 1 次元Betti数の最小値として定義される．2005 年 4 月，平澤と寺垣内は 2 橋結び目のcrosscap数を計算するアルゴリズムを与えた．私は，ここしばらく 2 成分絡み目のcrosscap数を研究しており，いくつかの 2 成分絡み目のcrosscap数を計算した．しかし，私が使った代数的方法では，2 成分絡み目のcrosscap数が 2 かどうかを判定するのにしか使えないことがわかった．2 成分絡み目のcrosscap数についてさらに調べるためには新たな技術が必要である．私は，3 次元多様体の幾何的手法が利用できると期待している．つまり，2 成分絡み目を境界として持つ向き付けられない曲面をすべて調べることである．おそらく，torus絡み目や 2 橋絡み目のような特別な種類の絡み目から始める必要があるであろう．私の研究の目標は 2 成分絡み目のcrosscap数の性質をできる限り調べることである．