組みひも群の定義とその性質

大阪大学理学研究科数学専攻修士１年
福島瞳美

セミナーでは Joan S.Birmon 著の「Braids,Links,and Mpping Class Groups」を読んでいます。その中の組みひも群の話をします。

定義

・M；2 次元以上の多様体

・$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} M$；$M$ の n 重直積

・$F_{0,n}M := \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{n} M | z_i \neq z_j \quad \text{if} \quad i \neq j\}$

・$(z_1, z_2, \cdots, z_n), (z'_1, z'_2, \cdots, z'_n) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{n} M$ について,

$(z_1, z_2, \cdots, z_n) \sim (z'_1, z'_2, \cdots, z'_n)$

$\Longleftrightarrow (z'_1, z'_2, \cdots, z'_n) = (z_{\mu(1)}, z_{\mu(2)}, \cdots, z_{\mu(n)}) \quad \exists \mu \in S_n$

・$B_{0,n}M := F_{0,n}M/\sim$

この時、$\pi_1 F_{0,n}M$ を pure braid group、$\pi_1 B_{0,n}M$ を (full) braid group という。

定理

$M = E^2$ とする。

・$\pi_1 B_{0,n}M$ は、n 個の元,$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{n-1}$ で生成され、

　・$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{if} \quad |i-j| \geq 2$

　・$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2$

という定義関係をもつ。

この証明に用いられるのが、次の定理。

・$A_{ij} := \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j-2}\sigma_{j-1} \quad (1 \leq i < j \leq n)$

とするとき、$\pi_1 F_{0,n}M$ は $\{A_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}$

で生成され、以下の定義関係をもつ。

$$\begin{aligned} A_{rs}^{-1} A_{ij} A_{rs} &= A_{ij} \quad if \quad r < s < i < j \quad or \quad i < r < s < j \\ &= A_{rj} A_{sj} A_{rj}^{-1} \quad if \quad i = s \\ &= A_{ij} A_{sj} A_{ij} (A_{ij} A_{sj})^{-1} \quad if \quad r = i < s < j \\ &= A_{rj} A_{sj} A_{rj}^{-1} A_{sj}^{-1} A_{ij} (A_{rj} A_{sj} A_{rj}^{-1} A_{sj}^{-1})^{-1} \quad if \quad r < i < s < j \end{aligned}$$