4-manifoldの中の曲面の配置について

大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻　Ｄ１　　礒田　北斗

４次元多様体の分類問題 (４次元多様体として単連結なものに限定する) への手法として homology を考える際、２次元 homology 類を考える事が重要になる (ポアンカレの双対定理が関係している). これは４次元多様体の中の曲面の配置を考える事がその構造を考える上で重要である事を意味している.

その一例として最も有名な「Rokhlin の符号定理」を紹介し、更にその拡張である「Guillou と Marin の合同式」について考察する.

「Rokhlin の符号定理」とは向き付けられた単連結４次元閉多様体 M^4 が II 型の交点形式を持つ時、その符号数が 16 の倍数になるというものである.

「Rokhlin の符号定理」を証明する手段として M^4 の特性曲面の Arf 不変量を用いる. これは M^4 上の曲面 F^2 を結び目の片側に張られた曲面として捉える事により、Arf 不変量、そして、M^4 の符号数を導く事になる.

次に「Rokhlin の符号定理の証明」と同じ観点 (Arf 不変量を用いた考え方) から Rokhlin の符号定理の一般化として「Guillou と Marin の合同式」について考える.

M^4 が「向き付け可能のみ」の場合から「向き付け不可能を含む」場合への一般化である. その為、扱われる不変量が拡張される ($\mathbf{Z}_2$ に値をとる Arf 不変量から、$\mathbf{Z}_8$ に値をとる Brown 不変量へ). これはそれぞれの不変量を定義している関数の拡張を意味する.

曲面から定義される $\mathbf{Z}_2$ への関数 (Arf 不変量を定義する為の) が $\mathbf{Z}_4$ への関数へと拡張される. そして、拡張された関数をもとに８個の値、つまり、$\mathbf{Z}_8$ で値をとるように新たな不変量が定義される. これが Brown 不変量である.

最終的にこの Brown 不変量を用いる事で、「Rokhlin の符号定理」と同様に (Arf 不変量でなく、Brown 不変量で M^4 の符号数を記述する事で) 向き付けられない場合へと「Rokhlin の符号定理」が一般化される.

参考文献

[1] Yukio Matsumoto, AN ELEMENTARY PROOF OF ROCHLIN‘S SIGNATURE THEOREM AND ITS EXTENSION BY GUILLOU AND MARIN, in ”A la Recherche de la Topologie Perdue,” Progress in Mathematics, Volume 62, Birkhäuser, 1986.

[2] 松本幸夫, ４次元のトポロジー, 日本評論社, 1979.