

# ブレイド群と LINK

岸本 健吾

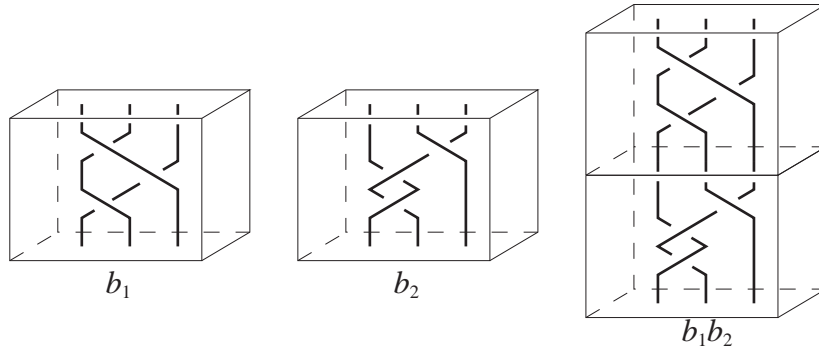
大阪市立大学理学研究科前期博士課程 2 年

## 1 ブレイド群

**Definition 1.1.**  $I^3$  を立方体  $\{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ ,  $n$  を自然数とし,  $I^3$  の上面と下面に  $n$  点ずつ  $P_i = (i/(n+1), 1/2, 1)$ ,  $Q_i = (i/(n+1), 1/2, 0)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) をとる.  $s_1, s_2, \dots, s_n$  を  $I^3$  内の互いに交わらない折れ線で  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  と  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  を結ぶものとする. このようなひもの和集合  $b = s_1 \cup s_2 \cup \dots \cup s_n$  を  $n$  次ブレイドといい, 各  $s_i$  を string という.

**Definition 1.2.**  $n$  次ブレイド  $b_1, b_2$  に対して, ambient isotopy  $f_t : I^3 \rightarrow I^3 (0 \leq t \leq 1)$  で  $f_t \mid \partial I^3 = \text{id} (0 \leq t \leq 1)$ ,  $f_0 = \text{id}$ ,  $f_1(b_1) = b_2$  を満たすものが存在するとき,  $b_1$  と  $b_2$  は同値であるという.

**Definition 1.3.**  $n$  次ブレイド  $b_1, b_2$  に対して,  $b_1$  を上に  $b_2$  を下にしてそのまま重ねて, さらに高さを半分に縮めてできるブレイドを  $b_1$  と  $b_2$  の積といい,  $b_1 b_2$  で表す.

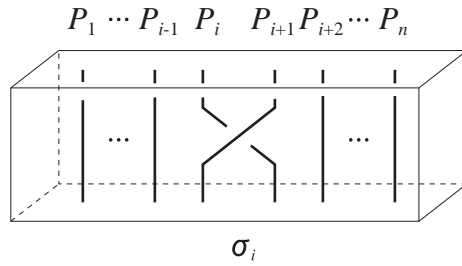


$n$  次ブレイド全体を上と同値関係で割ったものはこの積に関して群をなす. 単位元は  $P_i$  と  $Q_i$  を  $z$  軸に平行な直線で結んだものであり, ブレイド  $b$  の逆元は平面  $z = 1/2$  に関する  $b$  の鏡像である. この群を  $n$  次ブレイド群といい,  $B_n$  で表す. 以下  $B_n$  の元も単にブレイドという.

**Theorem 1.4.**  $n$  次ブレイド群において,  $\sigma_i$  を図のように  $i$  番目と  $i+1$  番目の string を  $i+1$  番目の string が手前にくるようにひねったブレイドとする.

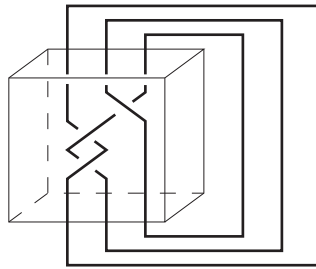
$n$  次ブレイド群  $B_n$  は  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  によって生成され, その群表示は

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i (|i - k| \geq 2), \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n) \rangle .$$



## 2 ブレイド群と link の関係

$\mathbb{R}^3$  内に置かれた立方体  $I^3$  内のブレイド  $b$  はその上端と下端を  $I^3$  の外部で適当に閉じることにより link にすることができる. このとき最も一般的な閉じ方は図のように  $P_i$  と  $Q_i$  をそのまま縦に他の弧と絡むことなしに結ぶ方法である.



このようにしてできる link を縦に閉じたブレイドといい、 $\hat{b}$  で表す. link の各成分の向きは  $b$  において上から下に向かう向きをつける. link  $L$  を縦に閉じたブレイドで表示することを  $L$  のブレイド表示という. 以下向き付けられた link を単に link という.

**Theorem 2.1.** 任意の link はブレイド表示可能である.

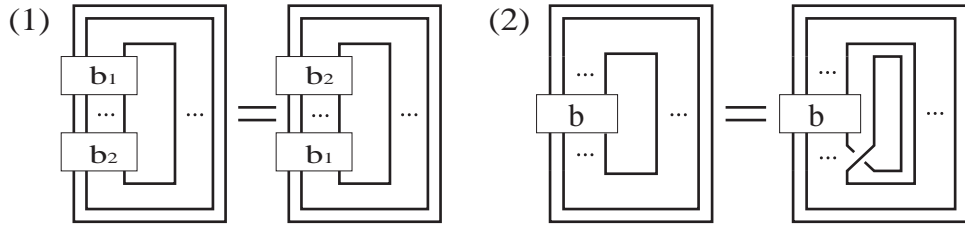
ブレイド群と link の間には次のような関係がある.

**Definition 2.2.** 異なる次数のブレイド群  $B_m, B_n (m < n)$  に対し,  $B_m$  の生成元  $\sigma_i$  と  $B_n$  の生成元  $\sigma_i$  を同一視することによって  $B_m \subset B_n$  とみなすことができる. しかしこのようにみなすと, ブレイド群の元  $b$  と書いた場合,  $b$  の次数がはっきりしないので  $b$  と  $b$  の次数  $n$  を組にして  $(b, n)$  と表すことにする. そしてこのような組の全体を  $B = \{(b, n) \mid n \in \mathbb{N}, b \in B_n\}$  と書く.  $B$  の中で次のような変形をマルコフ変形という.

$$(1) \quad (b_1 b_2, n) \leftrightarrow (b_2 b_1, n)$$

$$(2) \quad (b, n) \leftrightarrow (b \sigma_n^{\pm 1})$$

(1) を共役変形, (2) を安定化変形という. 有限回のマルコフ変形で移り合うブレイドをマルコフ同値なブレイドという.

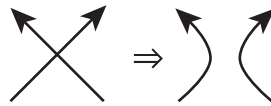


**Theorem 2.3.** ブレイド  $(b, n), (b', n')$  に対し, 縦に閉じたブレイド  $\hat{b}$  と  $\hat{b}'$  が同型である必要十分条件は  $(b, n)$  と  $(b', n')$  がマルコフ同値であることである.

次に link の不変量であるブレイド指数について知られていることを述べる.

**Definition 2.4.** link  $L$  をブレイド表示するために最小限必要なブレイドの string の数を  $L$  のブレイド指数といい,  $b(L)$  で表す.

**Definition 2.5.** link  $L$  の diagram  $D$  に対し,  $D$  の交点における平滑化という操作を図のように定める.



$D$  のすべての交点を平滑化すると, いくつかの円周  $S_1, S_2, \dots, S_m$  が得られる. この円周をザイフェルト円周という.

ザイフェルト円周の数とブレイド指数に関して次の定理がある.

**Theorem 2.6.** link  $L$  に対し, その diagram に最低限必要なザイフェルト円周の個数はブレイド指数に等しい.

与えられた link に対してそのブレイド指数を求めることは容易ではないが, それを評価する定理がある.

**Theorem 2.7.** link  $L$  に対し, 次の (P1), (P2) をみたす link の不変量  $P(L; v, z) \in \mathbb{Z}[a, a^{-1}, z, z^{-1}]$  が一意的に存在する.

$$(P1) \quad P(\bigcirc) = 1$$

$$(P2) \quad t^{-1}P\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}; t, z\right) - tP\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}; t, z\right) = zP\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}; t, z\right)$$

この  $P(L; v, z)$  を  $L$  のホフフリー多項式という.

**Theorem 2.8.** link  $L$  に対し, そのブレイド指数  $b(L)$  とホフフリー多項式  $P(L; v, z)$  の  $v$  の最大次数  $E$  と最小次数  $e$  は以下の不等式をみたす.

$$b(L) \geq \frac{E - e}{2} + 1$$

この定理は非常に有効的で 10 交点までの素な knot に対して,  $9_{42}, 9_{49}, 10_{132}, 10_{150}, 10_{156}$  を除いて等号が成立する.

### 3 今考えていること

$L$  を有向結び目  $K_1, K_2$  を成分にもつ 2 成分絡み目とし,  $L = K_1 \cup K_2$  で表します.  $K_2$  の向きを逆にしたものを  $\bar{K}_2$  と表したとき  $L' = K_1 \cup \bar{K}_2$  は一般的に  $L$  とは有向同型ではありません.

そこでこの  $L$  と  $L'$  がどのように異なるかに興味があり, 特にブレイドとしてみたときどのように変化するかという事を考えていきたいと思っています.

$L$  をブレイド表示した後に  $K_2$  の向きを逆にすると,  $K_1$  をブレイド表示したものに結び目が絡んでいるものとしてみる事ができます. このとき  $K_1$  を全く動かさずに  $K_2$  のみ動かしてブレイド表示するにはどうすればよいか, ということを実際考えています.

### 参考文献

- [1] 河内 明夫 編著: 結び目理論, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1990).
- [2] Murasugi, K. and Kurpita, B. I. A Study of Braids. Dordrecht, Netherlands: Kluwer, (1999).
- [3] Yamada, S. The Minimal Number of Seifert Circles Equals the Braid Index of a Link. Invent. Math. 89, 347-356, 1987.