Reidemeister torsionと ”等価な ”不変量

東京大学大学院数理科学研究科　M１　北山貴裕

大学院に入ってから、主にReidemeister torsionと関連の深いトピックを学んできました。具体的には、Alexander多項式の一般化であるねじれAlexander不変量と、Morse-Smale理論の一般化であるS^1値Morse理論についてです。

Reidemeister torsionは、通常[1]、連結有限ＣＷ複体Xと表現$\varphi : \pi_1 X \to F - 0$（F:体）に対して、局所系のhomology$H_*(X;F)$が消えるときに定義される不変量で、$\tau^\varphi(X)$のように表されます。もともとReidemeisterやFranzによってLens空間を分類するために用いられ、Cohenによって、有限ＣＷ複体の同相型に関して不変であることが示されました。現在では線形表現$\varphi : \pi_1 X \to GL_n(F)$について拡張されたり、Turaevによって、homology orientationやEuler構造という概念を用いた、不変量自体の精密化が考えられたりしています。この不変量の興味深いところは、計算が比較的容易であることと、いろいろな不変量の ”別の一面 ”を与えることです。

Milnorによって、Reidemeister torsionとAlexander多項式との ”等価性 ”が示されていますが、基本群の線形表現を考えることで、ねじれAlexander不変量とも等しくなることがわかります。ねじれAlexander不変量は、樹下-寺阪結び目とConway結び目を区別できるなど、Alexander多項式よりも強力な不変量で、結び目のfiber性やslice性、周期などに関しても、より精密な情報を含んでいることが知られています。

また、LeeとHatchingsによって、S^1値Morse理論との関係も知られています。滑らかな閉多様体上にS^1値Morse写像が与えられると、Morse-Smale複体と同様に、特異点から特異点へのgradient flowを ”数える ”ことで、Novikov複体というchain複体が構成されます。このchain複体の ”代数的torsion ”と、flowの閉軌道が持つ情報とを合わせることで、Reidemeister torsionが記述できます。

３次元の場合には、MengとTaubesによって、M$\times S^1$のSeiberg-Witten不変量と一致することも示されています。

今後、研究してみたいテーマとしては、上記の不変量が空間の幾何構造をどう反映するか（双曲構造を持つ場合に、その自然な基本群の表現の下で各不変量がどう振舞うかなど）や、linkの補空間に対してS^1値Morse理論がどう応用されるかということです。また、Morse homotopy理論についても勉強してみたいと考えています。

[1]実は、homologyが消えないときにも定義できるが、扱いが難しくなる。