

2次元の結び目・組み紐

山本 顕哲*

平成 18 年 7 月 13 日

1 概略

通常結び目・組み紐というと、3次元の中の1次元多様体のことをさす。では4次元ではどうか。普通の1次元の紐も考えられはするが、全部ほどけてしまうので面白くはない。で、2次元の紐を考えてみることになる。

2 定義

定義 2.1. (2次元結び目の定義)

- (i) \mathbb{R}^4 内に、局所平坦に埋め込まれた閉曲面を面絡み目と呼ぶ。
- (ii) 連結な面絡み目を面結び目と呼ぶ。
- (iii) 各成分が2-球面と同相な面絡み目を2-絡み目と呼ぶ。
- (iv) 連結な2-絡み目を2-結び目と呼ぶ。

定義 2.2. \mathbb{R}^3 に含まれる面絡み目と同値な面絡み目を、自明であると言う。

1次元の場合は円周だけを考えるとよかったが、2次元の場合は、球面のみを考える場合と、球面の他トーラスや射影平面も考える場合があることに注意。

定義 2.3. (2次元組み紐の定義) D^2, B^2 を2-円盤とし、 $pr_D : B^2 \times D^2 \rightarrow D^2$, $pr_B : B^2 \times D^2 \rightarrow B^2$ とする。また Q_m を、 D^2 内の m 点集合として一つ固定しておく。 $D^2 \times B^2$ 内に、適切に局所平坦に埋め込まれた2-多様体 S で、 $pr_B|_S$ が m 位の分岐被覆となり、 $\partial S = Q_m \times \partial B^2$ となるものを、曲面 m -組み紐と呼ぶ。

1次元の場合の組み紐は繊維束 $(S, pr_B, B^1, Q_m, \Sigma_m)$ であったが、2次元の場合はこういうものだけを考えることに意味は少ない。分岐する場合こそ意味があるとも言える。

定義 2.4. S, S' を曲面組み紐とする。以下の条件を満たすような全同位 $\{h_u\}_{u \in [0,1]}$ が存在する時、 S と S' は同値であると言う。

- (i) $h_1(S) = S'$
- (ii) $\forall u, \exists \underline{h}_u, pr_b \circ h_u = \underline{h}_u \circ pr_B$
- (iii) $h_u|_{D^2 \times \partial B^2}$ は恒等写像

1次元の組み紐の場合、条件を強くして $\underline{h}_u = id$ としても、あるいは弱くして条件2を抜いたり、さらに弱くして $\{h_u\}$ をただの S の同位にしても問題はなかったが、2次元の場合はそれぞれが違う意味を持つ。

*東京大学大学院数理科学研究科修士1年。kujawiak@ms.u-tokyo.ac.jp

定義 2.5. $Q_m \times B^2$ に同値な曲面組み紐を、自明であるという。

先ほど、繊維束になる 2 次元組み紐に意味はないと書いたが、それは自明になってしまうからである。「分岐点がはじめから存在しない」世界と「分岐点がない場合はつまらない」世界、これが 1 次元と 2 次元の大きな違いであるといえる。

3 簡単な性質

まず、面絡み目は自明な絡み目と帯だけで書けるという面白い定理を。

定理 3.1. F を面絡み目とする時、以下の条件を満たす B, L_-, L_+ が存在する。

(i) $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n, \quad B_i \cong D^2, \quad B_i \cap B_j = \emptyset$

(ii) L_-, L_+ は自明な絡み目

(iii) $\#(\partial B_i \cup L_-) = 2, \quad \#(\partial B_i \cup L_+) = 2$

(iv) $L_- \cup \partial B \setminus (L_- \cap \partial B)$ の閉包が L_+

(v) F は、 $L_- \times [-1, 0] \cup B \times [0] \cup L_+ \times [0, 1]$ の上と下を閉じたものと同値

次に、曲面組み紐に関する面白い定理を。ここで単純曲面組み紐とは、全ての特異点における底面への射影が $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^2$ と同相で、なおかつその像が全てばらばらなものであり、チャートとは、絡み目 (1 次元・2 次元両方) を $B^i \times D^1 (i = 1, 2)$ に射影し、その特異点集合をさらに B^i に射影したもので、各辺や頂点に情報を入れたものである。(1 次元の場合は、組み紐群の Artin 表示と同じものである)。

定理 3.2. S, S' を単純曲面組み紐とする。 $S = S'$ と、各チャートが有限回のチャート移動 (普通の組み紐群の同値関係の 2 次元版のようなもの) で移りあうことは同値。

最後に、結び目と組み紐を関連付ける定理を。古典的な結び目組み紐でも成り立つ定理である。

定理 3.3. (Alexander の定理) 全ての曲面絡み目は、ある曲面組み紐の閉包と全同位。

定理 3.4. (Markov の定理) 2 つの組み紐の閉包が同じ曲面絡み目を現すことと、2 つの組み紐が全同位・共役・(非)安定化で移りあうことは同値。

4 興味

修士 1 年の夏学期に勉強したことを少し。

1. ここで、絡み目 (1 次元・2 次元両方) の全同位変形を考え、それに伴うチャートの変形を考える。
チャートの変形の種類が 3 種類 (1 次元) 7 種類 (2 次元) であることに対する Morse 理論的な考察。
2. リボン結び目 (2- 結び目) 特に回転円環面結び目の交点数に対する考察。

5 参考文献

S.Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, AMS (2002)