曲面の motion 群と写像類群

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
福島 瞳美

組み紐群の一般化である、motion 群について考察しています。motion 群とは、簡単にいえば、空間の中に埋め込まれた多様体のその空間内での運動を記述する群です。
正確な定義は次で与えられます。以下、M を (境界のない) 向きづけ可能な m 次元位相多様体とし, N を M のコンパクト集合とします.

定義　motion 群 $\mathcal{M}(M,N)$ を次で定義する。

$$\mathcal{M}(M,N) := \{f_t; M \to M; \text{isotopy} | f_0 = id_M, f_1(N) = N\}/\sim$$

ただし、f, g が motion（つまり、 $f_t, g_t; M \to M; \text{isotopy}|f_0 = id_M, f_1(N) = N$）のとき、
$f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} \exists h;\text{motion s.t } h_t(N) = N (\forall t \in I)$ かつ、$\bar{g} \circ f \simeq h$ （端点をとめて isotope）

上の定義において、$g \circ f$ や $\bar{f}$ は、

$$(g \circ f)_t := \begin{cases} f_{2t} & (0 \leqq t \leqq 1/2) \\ g_{2t-1} \circ f_1 & (1/2 \leqq t \leqq 1), \end{cases}$$
$$\bar{f}_t := f_{1-t} \circ f_1^{-1}$$

を意味します。

イメージとしては、$g \circ f$ は、 f の操作の後に続けて g の操作をする、$\bar{f}$ は、f を巻き戻しする motion ととらえることができます。この中で本質的に違うものだけを扱おうとするのが motion 群の研究です。（たとえば、N がふくらんでまた縮むというのは止まっているのと同じとみなします。）

この研究の動機は、私が写像類群について考察するときに、「切って、ひねって、また貼り付ける」というふうに多様体を頭の中（$\mathbb{R}^3$ の中）で動かしていたことにあります。切るというのは本来連続変形では出来ない操作なので、それをせずに考えられる写像類について調べたいといのがきっかけでした。

motion 群の立場からいえば、M が S^3 や $\mathbb{R}^3$ で、 N が曲面の場合の motion について、f_1 を N に制限することで、写像類群の部分群を得、その性質を調べることが最終目標となります。たとえば、torelli 群の生成元である、BPmap や BSCCmap はうまく埋め込めば $\mathbb{R}^3$ のなかで motion によって実現することができます。ほかにも、hyperelliptic involution など、埋め込み方によって motion で実現できる写像類はいくらかあります。これらの写像類を（$\mathbb{R}^3, S^3$ 内で）実現可能な写像類と呼んでいます。

実現可能な写像類全体のなす、写像類群の部分群の生成系や表示を求めるということも勿論大きな目標ですが、この中で torelli 群の元のもつ性質にも注目しています。motion は補空間の基本群に対して自己同型写像をあたえますが（motion にひきずられて一緒に roop が動き、1 秒後にはまた補空間の roop になっている）、B P map や BSCCmap を 3 次元空間の中で実現する motion に関してはこれらが内部自己同型になっていることが観察できます。更にこの中でも BSCCmap は自明に作用しています。このことにより motion 群と torelli 群、Johnson 核を結びつけたいというのが一つの目標です（あくまで目標、、まだ漠然とした話ですが。。。）

現在は特に $\mathbb{R}^3$ の中で閉曲面の骨組みとなる, θ -グラフの motion 群について考察しています。θ -グラフとは、２点 {a,b} を頂点とする、複数の辺からなるグラフです。n本の辺によって与えられる θ -グラフのことを θ_n と書くことにします。

予想

$\mathcal{M}(M, \theta_n)$ は次で生成される.
$\sigma_i (i = 1 \cdots n-1)$（i 番目と i+1 番目の辺を入れ替える）
τ (二つの頂点を入れ替える)

この命題や一般の motion 群を考えるとき、motion 群を相対基本群 $\pi_1(Homeo^+(M), Homeo^+(M,N))$ としてとらえることが有益です。このことによって、次の完全列が得られます。

命題

次は完全列である
$\pi_1(Homeo^+(M,N), 1_M) \to \pi_1(Homeo^+(M), 1_M) \to \mathcal{M}(M,N) \to \mathcal{H}^+(M,N) \to \mathcal{H}^+(M)$
ただし、$\mathcal{H}^+(M)$ は M の写像類群を表す.
このことから、特に $M = \mathbb{R}^n$ としたとき $\mathcal{M}(M,N) \cong \mathcal{H}^+(M,N)$ がいえる.

$\mathcal{H}^+(M,N)$ は、Mの、Nを固定する写像類群とよばれ、これについては $M = \mathbb{R}^3, N = \sigma_2$ の場合に生成元が得られています。g が一般の場合や、埋め込み方をいろいろ変えたときに、その motion 群がどのように記述されるかや、グラフの motion 群など、この分野にはわかっていないことがたくさんありますが、これらをすこしずつ発掘していこうとしているところです。

参考文献

[Birman] Joan S. Birman『 Braids, Links, and Mapping Class Groups』（Princeton University Press ・ Annals of Mathematics Studies）

[Goldsmith] Goldsmith, Deborah L. 『The theory of motion groups』 Michigan Math. J. 28 (1981), no. 1, 3–17.

[廣瀬] 廣瀬進『４次元球面に自明に埋め込まれた曲面の写像類群』 （リーマン面に関連する位相幾何学　予稿集） 2002 年

[Cho] S.Cho『Homeomorphisms of the 3-sphere that preserve a Heegaard splitting of genus two』 math/0611767