

幾何的群論への入り口

井上 歩

東京工業大学理工学研究科数学専攻 博士 1 年

群という単語を聞いて、あなたはなにを思い浮かべますか？低次元幾何の研究に携わっている我々にとって、普段慣れ親しんでいる群はホモトピー群（特に基本群）やホモロジー群などではないでしょうか。これらは、直接的 / 間接的¹に空間の分類を与えます。また、ポアンカレ予想や幾何化予想²などが示唆する通り、(3次元)多様体の基本群は多様体の幾何的性質をよく反映しているはずですが。実際に、双曲多様体上の測地三角形に特有な条件式を考え、その条件式を満たすような群のクラスとして *word hyperbolic group* と呼ばれるものを定義する事ができますが、閉双曲多様体の基本群はこのクラスに含まれる事が知られています。

幾何的群論とは、(おおまかに言ってしまうと)この様な考え方を利用して群の分類や性質を研究しようという分野です。群に対してホモロジー群³などを考え、これにより群の分類や性質を調べたり、*word hyperbolic group*などを考え、これがどのような性質をもつかを調べたり、群に対して代数的に定義された値を幾何的手法を用いて計算したり、幾何的群論には様々な興味があり手法があります。今回は幾何的群論の入門として *word hyperbolic group* の定義を与え、時間があればその性質について簡単に触れたいと思います。

キーワード：

- 群の表示と *Cayley* グラフ
- *quasi-isometry*
- *word hyperbolic group*

参考文献

- [B] B.Bowditch, *A course on geometric group theory*, MSJ Memoirs vol.16 (2006), Mathematical Society of Japan
- [G] M.Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory, MSRI series vol.8, edited by S.M.Gersten, Springer-Verlag, pp.75-263

¹例えば結び目に対して定義される Alexander 多項式と呼ばれる不変量は、結び目の補空間の基本群の被覆変換の情報を多項式の形で記述したものです。

²ご存知の通り、G.Perelman により肯定的に解決されたとされています。

³群のホモロジー群そのものを幾何的群論と言ってよいかは良くわかりませんが …