# 曲面で分岐される $S^4$ の分岐被覆空間について

氏名　礒田 北斗

大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻

任意の向き付け可能な閉４次元多様体は、ある曲面で分岐する $S^4$ 上の分岐被覆多様体として構成される。以下ではその事について、簡単に紹介する。

## 1　準備

ある空間 $\tilde{X}$ から $X$ への上への写像 $p:\tilde{X}\to X$ が被覆写像であるとは、$X$ の任意の点 $x$ に連結な開近傍 $U$ が存在して、$p^{-1}(U)$ の各連結成分 $\tilde{U}_\lambda$ に連結した写像が同相写像になる事である。

この時、$\tilde{X}$ を $X$ 上の $p$ による被覆空間と呼ぶ。

また $p^{-1}(x)$ の個数を被覆度と呼び、被覆度が有限数 $n$ の時、n重被覆空間という。

被覆空間のより一般的な概念として分岐被覆空間を以下で定義する。

**定義 1.1.** $\tilde{M}$,$M$ を連結なn次元 PL 多様体とし、$p:\tilde{M}\to M$ を非退化な PL 写像とする。

$\tilde{B_p}$,$B_p$ を $\tilde{M}$,$M$ の (n-2)-部分複体とおき、$p^{-1}(B_p)=\tilde{B_p}$ とする。

$p$ が分岐被覆写像であるとは、$p$ を $\tilde{M}-\tilde{B_p}$ に制限した写像 $p:\tilde{M}-\tilde{B_p}\to M-B_p$ が被覆写像になるという事である。

$\tilde{B_p}$,$B_p$ を $\tilde{M}$,$M$ の分岐集合と呼ぶ。

以下に具体例を述べる。

**例 1.2.** $D=\{z||z|\leq 1, z$ は複素数 $\}$ から $D$ への写像 $p_m$ を $p_m(z)=z^m \quad (m=1,2,\cdots)$ とすると $D$ は $D$ 自身の分岐被覆空間となる。（分岐集合は原点）

**例 1.3.** 種数 $g$ の閉曲面は $2g+2$ 個の点で分岐する $S^2$ の分岐被覆多様体として構成される。

３次元の具体例として、1920 年の Alexander の結果が存在する。

## 2　３次元の場合

多様体の分類と構成について考えたい。その時、１つの方法として分岐被覆を用いて考える方法がある。

任意の向き付けられた閉 n 次元多様体は n 次元球面の分岐被覆多様体として構成される。

３次元の場合、大きく分けて２通りの方法で $S^3$ の被覆空間が研究されている。

１つは巡回被覆空間である。

$K$ を $S^3$ 内の結び目、$F$ をそのザイフェルト曲面とする。

この時、$S^3$ を $F$ にそって切り開くと、$S^3$ から新しい境界のある３次元多様体 $N$ ができる。その境界は $F$ の２つのコピー $F'$,$F$” を $K$ にそって張り合わせたものである。

このような多様体を $m$ 個用意し、順に１から $m$ まで番号を振ってやる。($N_1,N_2,\cdots,N_m$ とする）

この時、$N_i$ の境界 $F"_i$ と $N_{i+1}$ の境界 $F'_{i+1}$ を張り合わせ、最後に $N_m$ の境界 $F"_m$ と $N_1$ の境界 $F'_1$ を張り合わせるような被覆を考える。
これを結び目 $K$ で分岐する $S^3$ の巡回被覆空間と呼ぶ。

1920 年、Alexander により以下の定理が証明された。

**定理 2.1.** （Alexander の定理）
任意の向き付けられた閉３次元多様体は、ある結び目で分岐する $S^3$ の単純３重分岐被覆多様体として構成される。

ここでは詳しい構成は省略する。

## 3　４次元の場合

次に４次元の場合を考えてみよう。
2002 年、Iori と Piergallin によって以下が証明された。

**定理 3.1.** （Iori,Piergallin）
任意の向き付けられた閉４次元多様体は、ある局所平坦なＰＬ曲面で分岐する $S^4$ の単純５重分岐被覆多様体として構成される。

上の定理から、任意の向き付けられた閉４次元多様体が曲面で分岐する $S^4$ の分岐被覆多様体として分類・構成できる事がわかる。
では、具体的にどのような曲面によって、どんな４次元多様体が構成されるのか？
これは３次元の場合と違い、まだ殆ど知られていない。

## 参考文献

[1] M.Iori, R.Piergallin, *The 4-manifolds as covers of the 4-sphere branched over non-singular surfaces*, Geometry and Topology, **6** (2002), 393–401.

[2] R.Piergallin, *Four-manifolds as 4-fold branched covers of $S^4$*, Topology, **34** (1995), 497–508.

[3] J.M.Montesinos, *A note on moves and irregular coverings of $S^4$*, Contemp.Math, **44** (1985), 345–349.

[4] JW.Alexander, *A note on Riemainn spaces*, Bull.Amer.Math.Soc, **26** (1920), 370–373.