3次元多様体の種数2のヘガード分解について

大阪大学大学院理学研究科数学専攻 M2
張 娟姫 (Yeonhee JANG)

M を向き付け可能な3次元多様体とする. すると, M は二つのトーラス体に分解できることが知られている. その分解を**ヘガード分解**といい, $(V_1, V_2; F)$ と表す. ここで, V_i はトーラス体であり $(i = 1, 2)$, $M = V_1 \cup V_2$ かつ $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2 = F$ が成り立つ. 同じ種数をもつ二つのヘガード分解 $(V_1, V_2; F)$, $(W_1, W_2; G)$ に対し, F を G に移す M 上の自己同相写像 (アイソトピー) が存在するとき二つのヘガード分解は**同相 (アイソトピック)** であるという.

$D(2)$ を二つの特異ファイバーをもつ円板上のザイフェルト多様体とする. S_1 と S_2 を $D(2)$ の元とし, $f : \partial S_2 \longrightarrow \partial S_1$ を同相写像とすると, ∂S_1 と ∂S_2 を f で貼り合わせることによって向き付け可能な3次元閉多様体 $M = S_1 \cup_f S_2$ が得られる.

Theorem 1 (Morimoto) $M = S_1 \cup_f S_2$ は高々4つのアイソトピックでない種数2のヘガード分解をもつ.

$E_{2,p}$ を $(2, p)$-型のトーラス結び目の補空間とする. $S_i = E_{2,p}$ のとき, ∂S_i のファイバーとメリディアンをそれぞれ h_i と m_i で表す.

Morimoto は M の種数2のヘガード分解を全て書き上げているが, それらの (アイソトピー又は同相による) 分類はされていない. Morimoto は, もし M が丁度4つのアイソトピックでない種数2のヘガード分解をもつとしたら, それは $S_1 = E_{2,\alpha}$, $S_2 = E_{2,\beta}$(ただし, α と β は3より大きい奇数) かつ $f(h_2) = \varepsilon m_1, h(m_2) = \delta h_1$ $(\varepsilon\delta = \pm 1)$ の場合であることを証明し, 実際にその場合4つのヘガード分解は互いにアイソトピックでないだろうと予想した.

二つのヘガード分解がアイソトピックでないことを示す方法として、多様体の写像類群を計算する方法が知られているが、この場合はその方法では区別することができない. しかし、次の定理と事実に注目すれば、上の4つのヘガード分解が互いにアイソトピックでないことが証明できる.

Theorem 2 (Boileau-Collins-Zieschang) M を向き付け可能な3次元閉多様体とし, $(V_1, V_2; F)$ と $(W_1, W_2; G)$ を M の種数2のヘガード分解とする. $\{v_i^1, v_i^2\}$, $\{w_i^1, w_i^2\}$ $(i = 1, 2)$ をそれぞれ $\pi_1(V_i)$, $\pi_1(W_i)$ の生成系とする.

このとき, もし $(V_1, V_2; F)$ と $(W_1, W_2; G)$ がアイソトピックならば, 次のいずれかが成り立つ.

(i) $[v_1^1, v_1^2]$ と $[w_1^1, w_1^2]^{\pm 1}$ が共役かつ $[v_2^1, v_2^2]$ と $[w_2^1, w_2^2]^{\pm 1}$ が共役である.
(ii) $[v_1^1, v_1^2]$ と $[w_2^1, w_2^2]^{\pm 1}$ が共役かつ $[v_2^1, v_2^2]$ と $[w_1^1, w_1^2]^{\pm 1}$ が共役である.

Fact 1 この場合, 共役問題は各 S_i 内の語の問題に帰着する.

Fact 2 (Lyndon-Schupp) もし二つの群 A, B に対して語の問題が解決可能ならば, その自由積 $A * B$ でも語の問題は解決可能である.
(この事実を用いて、ここで必要となる S_i 内の語の問題を解くことができる.)