種数 2 交代結び目のアレクサンダー多項式について

鄭 仁大 (In Dae JONG)

大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻

Email: jong@sci.osaka-cu.ac.jp

本稿では，現在研究していることの概要及び得られた結果を述べる．

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$（もしくは 3 次元球面 S^3）へ埋め込まれた μ 個の単純閉曲線を μ **成分絡み目**といいい, 特に $\mu = 1$ のときは**結び目**という．$\mathbb{R}^3$ 内の μ 成分絡み目 L と L' に対して, 向きを保つ同相写像 $\varphi : (\mathbb{R}^3, L) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, L')$ が存在するとき, **絡み目 L と L' は同値**であるという．任意の絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ に対して, 射影 $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を, $\pi(L)$ が有限個の横断的に交わる二重点以外に自己交叉を持たないように取れる．紐の上下の情報を与えた, 横断的に交わる二重点を**交点**といいい, $\pi(L)$ に交点の情報を与えたものを絡み目 L の**ダイアグラム**という．ダイアグラム D の各成分に沿って辿ると上下交点が交互に現れるとき, ダイアグラム D は**交代**であるといいい, 交代ダイアグラムを持つ絡み目を**交代絡み目**という．同値な絡み目に対しては同じ値を取る代数的量のことを**絡み目不変量**という．**アレクサンダー多項式**とは, 整数係数ローラン多項式に値を取る不変量で, この多項式は $\pm t^l$ 倍の違いを無視して絡み目に対して一意的に定まる [1]．絡み目 L に対して, $\partial F = L$ を満たす向き付け可能な曲面 F を L の**ザイフェルト曲面**といいい, **絡み目 L の種数** $g(L)$ を $g(L) = \min\{g(F) \mid F : L \text{ のザイフェルト曲面}\}$ と定義する．

交代絡み目のアレクサンダー多項式に関して，次のことが知られている．

命題 1 ([3], [6])**.** L を μ 成分非分離交代絡み目，L のアレクサンダー多項式を $\Delta_L(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j$ とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $\Delta_L(t) = 1$ 又は，$k = 0, 1, \ldots, m-1$ に対して，$a_k a_{k+1} < 0$ が成り立つ．

(ii) $m = 2g(L) + \mu - 1$ が成り立つ．

定義 2. 整数係数多項式 $f(t) = \sum_{n=0}^{m} a_n t^n$ が次の条件を満たすとき, **台形的**であるという．

(i) $a_0, a_1, \ldots, a_m \neq 0$ かつ，これらは同符号である．

(ii) $t^m f(t^{-1}) = f(t)$ が成り立つ．

(iii) $0 < |a_0| \leq |a_1| \leq \cdots \leq |a_{[\frac{m}{2}]}|$ が成り立つ．

(iv) ある i に対して，$a_i = a_{i+1}$ が成り立つとすると，$j = i, i+1, \ldots, [\frac{m}{2}]$ に対して，$a_i = a_j$ が成り立つ．

交代絡み目のアレクサンダー多項式に関して，R. H. Fox による**台形予想**と呼ばれる次の予想がある．

予想 3 ([4])**.** L を交代絡み目とすると, $\Delta_L(-t)$ は台形的である．

台形予想は, 1979 年に R.I. Hartley によって 2-橋絡み目に対して [5], 1985 年に K. Murasugi によって交代代数絡み目に対して [9], 各々正しいことが証明されている．

また，絡み目の**ファイバー性**に関しても，交代絡み目に関しては次の命題が与えられている．

命題 4 ([8])**.** L を交代絡み目とする．このとき，L がファイバー絡み目であるための必要十分条件は L のアレクサンダー多項式がモニックな多項式であることである．

次の命題はよく知られた事実である．

命題 5. 種数 1 のファイバー交代結び目は 3_1（三つ葉結び目），4_1（8 の字結び目）に限る．

種数 2 の交代結び目は 24 個のある交代結び目と $\overline{t'_2}$ move と呼ばれる図のようなダイアグラムの局所変形操作によって完全に記述されることが知られている ([2], [11])．24 個の結び目とは, $5_1, 6_2, 6_3, 7_5, 7_6, 7_7, 8_{12}, 8_{14}, 8_{15}, 9_{23}, 9_{25}, 9_{38}, 9_{39}, 9_{41}, 10_{58}, 10_{97}, 10_{101}, 10_{120}$, 11_{123}, 11_{148}, 11_{329}, $12_{1097}, 12_{1202}$，13_{4233} のことである．

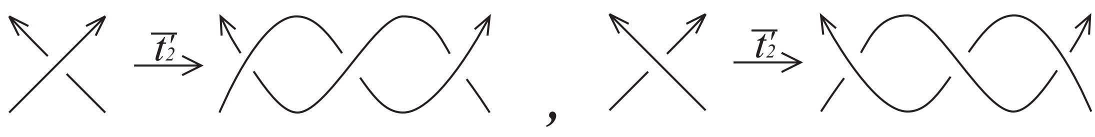

図 1　$\overline{t'_2}$ move

このことから，種数 2 の交代結び目を調べるには，上記の 24 個の結び目と $\overline{t'_2}$ move を調べればよいことになる．結び目のアレクサンダー多項式を重み付き有向平面グラフから

求める手法を用いて，24 個の結び目と $\overline{t_2'}$ move を調べることで，以下の定理を得ることができた．

定理 6. 台形予想は，種数 2 以下の交代結び目に対しては正しい．

定理 6 は，P. Ozsváth と Z. Szabó によって，Floer Homology を用いることで証明されている [10].

定理 7. 次の多項式は台形性を満たすが，交代結び目のアレクサンダー多項式として実現できない．

$$\begin{array}{ll} 1-n_1t+(2n_1-1)t^2-n_1t^3+t^4 & \text{for } n_1=4 \text{ or } n_1\geq 8, \\ 1-n_2t+(2n_2-3)t^2-n_2t^3+t^4 & \text{for } n_2\geq 6 \end{array}$$

また，$n_1=1,2,3,5,6,7$, $n_2=2,3,4,5$ に関しては実現する交代結び目は存在する．（系 8 に書いてある結び目である．）

命題 4 と定理 7 から次の系を得る．

系 8 (cf. [7])**.** 種数 2 の交代ファイバー結び目は以下の結び目が全てである：$5_1, 5_1^*, 6_2, 6_2^*, 6_3, 7_6, 7_6^*, 7_7, 7_7^*, 8_{12}, 3_1\#3_1, 3_1\#3_1^*, 3_1^*\#3_1^*, 3_1\#4_1, 3_1^*\#4_1$, $4_1\#4_1$.

また，これら種数 2 の交代ファイバー結び目と $\overline{t_2'}$ move を調べることで，次の定理を得ることができる．

定理 9. 次の多項式は台形性を満たすが，交代結び目のアレクサンダー多項式として実現できない．

$$\begin{array}{ll} 2-m_1t+(2m_1-3)t^2-m_1t^3+2t^4 & \text{for } m_1=5,\ 8,\ \text{or } m_1\geq 14, \\ 2-m_2t+(2m_2-5)t^2-m_2t^3+2t^4 & \text{for } m_2\geq 12 \end{array}$$

上記の多項式に含まれない交代多項式は全て交代結び目の多項式として実現される．それが以下の定理である．

定理 10. 種数 2 の素な交代結び目でアレクサンダー多項式の定数係数が 2 であるものは，鏡像を無視すると以下の結び目が全てである：7_5, 8_4, 8_6, 8_8, 8_{11}, 8_{13}, 8_{14}, 9_8, 9_{12}, 9_{14}, 9_{15}, 9_{19}, 9_{21}, 9_{37}, 10_{13}, 10_{35}．又，種数 2 の合成交代結び目でアレクサンダー多項式の定数係数が 2 であるものは，以下の結び目が全てである：$3_1\#5_2$, $3_1^*\#5_2$, $3_1\#5_2^*$, $3_1^*\#5_2^*$, $3_1\#6_1$, $3_1^*\#6_1$, $3_1\#6_1^*$, $3_1^*\#6_1^*$, $4_1\#5_2$, $4_1\#5_2^*$, $4_1\#6_1$, and $4_1\#6_1^*$.

参考文献

[1] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), 275–306.

[2] P. R. Cromwell, *Knots and links*, Cambridge University Press, 2004.

[3] R. H. Crowell, *Genus of alternating link types*, Ann. of Math. **69** (1959), no. 2, 258–275.

[4] R. H. Fox, *Some problems in knot theory*, Topology of 3-Manifolds and Related Topics (1962), 168–176.

[5] R. I. Hartley, *On two-bridged knot polynomials*, J. Austral. Math. Soc. Ser.A **28** (1979), 241–249.

[6] K. Murasugi, *On the Alexander polynomial of the alternating knot*, Osaka Math. J. **10** (1958), 181–189.

[7] ———, *On alternating knots*, Osaka Math. J. **12** (1960), 277–303.

[8] ———, *On a certain subgroup of the group of an alternating link*, Amer. J. Math. **85** (1963), 544–550.

[9] ———, *On the Alexander polynomial of alternating algebraic knots*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **39** (1985), no. 3, 317–333.

[10] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Heegaard Floer homology and alternating knots*, Geom. Topol. **7** (2003), 225–254.

[11] A. Stoimenow, *Knots of genus two*, preprint (2005), `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~stoimeno/papers.html`.