超ケーラー多様体

川谷 康太郎*

大阪大学理学研究科数学専攻

1 超ケーラー多様体の紹介

定義 1.1. $4n$ 次元コンパクト Riemann 多様体 (M, g) で, ホロノミー群が $Sp(n)$ になる時, (M, g) または M を超ケーラー多様体と呼ぶ.

超ケーラーと名前がついている事から分かるように, 超ケーラー多様体は複素多様体, 特にケーラー多様体となる事が知られいます.

定義 1.2. コンパクト複素多様体 X が以下の条件を満たす時, 既約シンプレクティック多様体と呼ぶ.

1. X は Kähler 多様体
2. X は単連結
3. $H^0(X, \Omega^2) = \mathbb{C}\langle\sigma\rangle$. ただし, σ は至る所非退化な正則 2 形式.

σ の事をシンプレクティック形式と呼ぶ.

注意 1.3. σ の非退化性から $\dim_{\mathbb{C}} X = 2n$ である事が従います.

既約シンプレクティック多様体と超ケーラー多様体には次の関係があります.

定理 1.4. X 既約シンプレクティック多様体を Riemann 多様体とみなすと, その Holonomy 群は $Sp(n)$ と同型. 逆に Holonomy 群が $Sp(n)$ と同型になるコンパクト $4n$ 次元 Riemann(M, g) 多様体は既約シンプレクティック多様体.

超ケーラー多様体の一番次元が低い時は, K3 曲面として知られていて, よくわかっています. K3 曲面は比較的分かりやすく, $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ の 4 次超曲面等があります. 大域 Torelli の定理が成り立つ事もわかっています.

定理 1.5. K3 曲面は全て変形でつながる.

そのため, K3 曲面は全て微分同相であることが分かります. 従って, K3 曲面のトポロジーは全て決定され, その betti 数は

$$b_1 = b_3 = 0,\ b_2 = 22,$$

一般の超ケーラー多様体の betti 数は良くわかっていません. 複素 4 次元のときは, b_4 は b_2, b_3 で決定する事が出来るので, b_2, b_3 が決定できれば十分です. 4 次元のときは, $3 \leq b_2 \leq 8$ or $b_2 = 23$ となる事が分かっています. b_2 の評価に伴い, b_3 も評価されます. $3 \leq b_2$ である事は, ホロノミー群が $Sp(n)$ となる事から従っていて, 実際には $b_2 = 3$ となる超ケーラー多様体は存在しない事が予想されています.

*k-kotaro@hotmail.co.jp

2　二次形式について

超ケーラー多様体の 2 次のコホモロジー $H^2(X,\mathbb{C})$ には有名な二次形式が定まるので, それを紹介します.

定義 2.1. $2n$ 次元超ケーラー多様体を X, X のシンプレクティック 2 形式を σ として, $H^2(X,\mathbb{C})$ 上の二次形式 q_X を次のように定める.

$$q_X(\alpha) := \frac{n}{2}\int_X (\sigma\bar{\sigma})^{n-1}\alpha^2 + (1-n)\int_X \sigma^n\bar{\sigma}^{n-1}\alpha\int_X \sigma^{n-1}\bar{\sigma}^n\alpha$$

初めに $q_X(\sigma+\bar{\sigma})=1$ となるように正規化しておき Hodge 分解を用いると, もう少し表示がみやすくなります. $H^2(X,\mathbb{C}) = H^{2,0}(X)\oplus H^{1,1}(X)\oplus H^{0,2}(X)$ で, $H^{2,0}(X)=\mathbb{C}\langle\sigma\rangle, H^{0,2}(X)=\mathbb{C}\langle\bar{\sigma}\rangle$ なので $\alpha\in H^2(X,\mathbb{C})$ について $\alpha=\lambda\sigma+\alpha^{1,1}+\mu\bar{\sigma}$ となり, これを代入すると

$$q_X(\alpha) := \frac{n}{2}\int_X (\sigma\bar{\sigma})^{n-1}(\alpha^{1,1})^2 + \lambda\mu$$

となります. これ以降, シンプレクティック形式 σ は正規化されているとします. 二次形式について次のような事が成り立ちます.

定理 2.2. 超ケーラー多様体 X 上の二次形式 q_X について

1. Hodge 分解 $H^2(X,\mathbb{C}) = H^{1,1}(X)\oplus\big(H^{2,0}(X)\oplus H^{0,2}(X)\big)$ は q_X について直交分解.
2. q_X は $H^2(X,\mathbb{Z})$ 上の二次形式を定める.

証明. 1. については上に書いた $q_X(\alpha) := \frac{n}{2}\int_X(\sigma\bar{\sigma})^{n-1}(\alpha^{1,1})^2+\lambda\mu$ を用いる事で分かる. 2. については次の補題を用いる事で $H^2(X,\mathbb{Z})$ 上の二次形式を定める事が示せる.

補題 2.3. $\alpha,\beta\in H^2(X,\mathbb{C})$ について次の等式が成立する.

$$\Big(\int_X \alpha^{2n}\Big)^2 q_X(\beta) = q_X(\alpha)\Big((2n-1)\int_X\alpha^{2n}\int_X\alpha^{2n-2}\beta^2-(2n-2)\Big(\int_X\alpha^{2n-1}\beta\Big)^2\Big)$$

補題 2.3 によって上の式を書き換えると

$$\frac{q_X(\beta)}{q_X(\alpha)} = \frac{1}{\Big(\int_X\alpha^{2n}\Big)^2}\Big((2n-1)\int_X\alpha^{2n}\int_X\alpha^{2n-2}\beta^2-(2n-2)\Big(\int_X\alpha^{2n-1}\beta\Big)^2\Big)$$

となり, $\sigma+\bar{\sigma}\in H^2(X,\mathbb{R})$ について, $\int_X(\sigma+\bar{\sigma})^{2n}>0$ かつ $q_X(\sigma+\bar{\sigma})=1$ なので, 次のような $\alpha\in H^2(X,\mathbb{Q})$ を選ぶ事が出来る.

$$\exists\alpha\in H^2(X,\mathbb{Q})\ \text{s.t.}\ q_X(\alpha)\in\mathbb{Q}\ \text{and}\ q_X(\alpha)\neq 0$$

また, $\alpha\in H^2(X,\mathbb{Q})$ について, $\int_X\alpha^{2n}\in\mathbb{Q}$ に注意すると, $\beta\in H^2(X,\mathbb{Q})$ の時 $\dfrac{q_X(\beta)}{q_X(\alpha)}\in\mathbb{Q}$ となるので, $q_X(\beta)\in\mathbb{Q}$ となる. 適当に係数を調整する事で $H^2(X,\mathbb{Z})$ 上の二次形式を定める事がわかる. □

注意 2.4. q_X の符号は $(3,b_2-3)$ である事も知られています.

参考文献

[Huy] Huybrechts,D. *Compact Hyperkähler manifold*, Invent.Math, **135**(1999), 63–113.

[Huy2] Huybrechts,D. *Erratum:Compact Hyperkähler manifold*, Invent.Math, **152**(2003), 209–212.

[GHJ] Gross,M., Huybrechts,D., Joyce,D. *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries*, Springer, (2001).

[Gua] Guan,D. *On the betti number of irreducible compacy Hyperkähler manifolds of complex dimention four*, Math.Research Letters, **8**(2001), 663–669.