Pre-fiber surfaceについて

近藤悠佳子
奈良女子大学大学院人間文化研究科博士前期課程 2 年

現在 3 次元球面 S^3 内の pre-fiber surface と呼ばれる曲面について研究している．ここでは pre-fiber surface の定義と, 基本的な性質について紹介する．

1 Sutured manifold

pre-fiber surface を定義するために, まず sutured manifold の定義を紹介する．
コンパクトで向き付けられた 3 次元多様体 M と, ∂M 内の surface γ との多様体対 (M, γ) が **sutured manifold** であるとは, 次の (1),(2),(3) を満たすときをいう．

(1)γ はアニュラスの直和 $A(\gamma)$ とトーラスの直和 $T(\gamma)$ の直和である,
(2)$A(\gamma)$ の各成分は **suture** と呼ばれるその中心となる向きのついた単純閉曲線（その和を $s(\gamma)$ と書く）を含んでいる,
(3)$R(\gamma) = \partial M \setminus \mathrm{Int}\gamma$ とするとき, $R(\gamma)$ には、$\partial R(\gamma)$ の各成分が $s(\gamma)$ の対応する成分と γ においてホモローグとなるように, 向きが入っている．($R(\gamma)$ の成分のうちで法線ベクトルが外向き, または内向きのもの全体の和をそれぞれ $R_+(\gamma), R_-(\gamma)$ と書く．）

Sをコンパクトなsurfaceで $\partial S \neq \emptyset$ なるものとする．このとき, $M = S \times [0,1], \gamma = \partial S \times [0,1], R_+(\gamma) = S \times 1, R_-(\gamma) = S \times 0$ とすれば, (M, γ) は sutured manifold となる．このような sutured manifold のことを **product sutured manifold** と呼ぶ.
L を S^3 内の link とし, S を L の Seifert surface とする．L の外部空間 $E = E(L)$ と $S_E = S \cap E$ に対し、正則近傍対 $(N, \delta) = (N(S_E, E), N(\partial S_E, \partial E))$ には自然に product sutured manifold の構造が入る．$N^c = \mathrm{cl}(E(L) \setminus N), \delta^c = \mathrm{cl}(\partial E(L) \setminus \delta)$ とし, (N^c, δ^c) に $R_+(\delta^c) = R_-(\delta)$ なる構造を入れた sutured manifold (N^c, δ^c) のことを S の **complementary sutured manifold** と呼ぶ.

2 Pre-fiber surface

S を S^3 内の connected Seifert surface とし, (N^c, δ^c) を S に対する complementary sutured manifold とする．いま, $R_+(\delta^c)$, $R_-(\delta^c)$ の互いに disjoint な compressing disks D^+, D^- で次のようなものが存在するとき, S は **pre-fiber surface** であるという．

N^c を $D^+ \cup D^-$ で切り開いて得られる多様体を $\overline{N}$ とかくとき, $(\overline{N}, \delta^c)$ は product sutured manifold になっている．

そのとき, S の compressing disksで次のようなものが存在する: $\mathrm{Int}\overline{D}^+ \cap \mathrm{Int}\overline{D}^- = \emptyset, \overline{D}^+ \cap N^c = D^+, \overline{D}^- \cap N^c = D^-$.
このような $\overline{D}^+, \overline{D}^-$ は pre-fiber surface S の **canonical compressing disks** であるという.

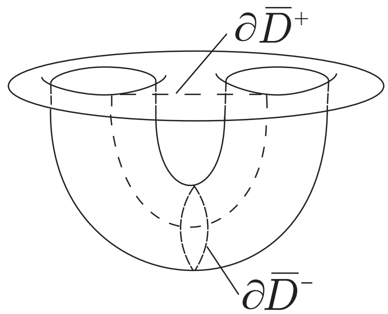

図 2.1: pre-fiber surface

Pre-fiber surface に対して, 次のことが知られている.

定理 2.1 S を canonical compressing disks $\overline{D}^{+}, \overline{D}^{-}$ をもつような pre-fiber surface とする. a を S に proper に埋め込まれた arc で $\partial D^{+}, \partial D^{-}$ とそれぞれ一点で交わるようなものとする. このとき, a に沿って S に $\pm$twist を加えて得られる surface S' は fiber surface である.

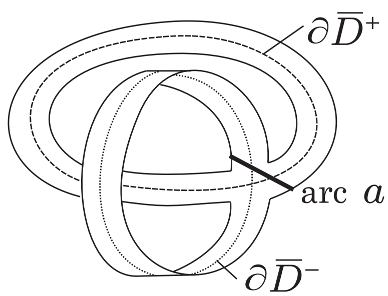

図 2.2: pre-fiber surface

定理 2.2 S を canonical compressing disks $\overline{D}^{+}, \overline{D}^{-}$ をもつような pre-fiber surface とする. また (N^c, δ^c) を S の complementary sutured manifold とする. b を次の性質をもつ S に attach している band とする.

> b の core arc α に対して $\alpha \cap N^c$ を α' とする.
> *(1)*α' が D^{+}, D^{-} と一点で交わる.
> *(2)*N^c の中に $\alpha' \subset \partial\Delta, \Delta \cap \partial N^c = \partial\Delta \cap \partial N^c = \mathrm{cl}(\partial\Delta \setminus \alpha'), \partial\Delta \cap R_{+}(\delta^c)(\partial\Delta \cap R_{-}(\delta^c)\mathrm{resp.})$ が arc となるような disk Δ が存在する.

そのとき T に band b を attach して得られる surface S' は fiber surface である.

今後は ∂F が fibered link でないような pre-fiber surface はどのようなものがあるかを考えていきたい.