量子不変量とその周辺

野坂武史

京都大学大学院理学研究科数理解析系　修士１回生

結び目に関しては、修士課程に入り大槻知忠先生についてから始めることになりましたので、まだまだ未熟で、研究に至っておらず勉強中です。前期では [1] をセミナーで読んでいます。それと最近、個人的に「圏化 (categorification)」に興味があり、論文を色々よみあさっています。この半年で勉強した事を兼ねて、わかった流れとノリを以下、細かい事を抜きにして述べたいと思います。ただし、正しいという保証もなく、価値観も主観に基づいている事はご了承下さい。参考文献も全て読んで理解している訳でもありません。

結び目とは、有限個の S^1 から R^3 への (枠付き) 埋め込みの isotopy class を分類する事を最大の目的にしています。以下、この isotopy class を K とおきましょう。
K を分類する事は、K からのある集合 S への写像を作り、その像を確認する事です。これを不変量と云います。これが単射であり、その像が確定や計算できることを目的にしています。ただし勿論 K=S では駄目です。
歴史的には 1920 年代に発見された古典的な不変量として、$S = Z[t, t^{-1}]$ にもつ、Alexander polynomial が、位相的に構成されました。

次に 80 年代には、Jones polynomial が発見されました。これを機に、次から次へと homfly 多項式や Kaufmann 多項式などが発見されました。これらの不変量は、一つの交点の違う形状の結び目らの不変量、が線形関係式 (skein relation) により特徴付けられているのが特徴です。
一方で、Drinfel'd らによって ribbon Hopf algebra というものが構成されれば、不変量が出来る事がわかりました。量子群が ribbon Hopf algebra です。ですので、リー環とその表現が与えれば、それを deformation すれば不変量が出ます。これらを量子不変量といいます。
Turaev[2] による (0+1)TQFT (0+1 次元 topological quantum field theory) の idea から量子不変量は華麗に導入できます。実は、上記の Jones 、Homfly、Kaufmann 多項式は, 表現 $(sl_2, C^2)(Sl_n, C^n)(SO(2n), C^{2n})$ からそれぞれ構成したものと、一致します。

さて次に 90 年代では、これらの大量の量子不変量を普遍的にまとめるための Kontsevich 不変量と、量子不変量の Skein relation のような性質をいっせいにまとめる Vassiliev 不変量が提案されます。そしてこの２つの不変量が普遍的な意味で同じことがわかっています ([3] はよくまとまった論文)。
以上は、[1][4] を参考にして標語的に羅列しました。詳しくはそちらを御参照下さい。　,

21 世紀に入ってからの流行や状況の僕はよくわかりませんが、一つの流れとして categorification が挙げれると思います。事の始まりは [5] で、結び目に対して $Z^2 - gradedZ[c]moduleH^{i,j}$ の不変量を持ちます。結び目ホモロジーと言う人もいます。驚く事に、これのオイラー多項式 $\sum_{i,j}(-1)^i rankH^{i,j}$ が Jones 多項式と一致します (古典的なものより強くてオイラー標数みたいなもので還元されることを『圏化』というらしいです)。

この圏化は結び目の解消を object とする (1+1)TQFT の発想 (よって、 フロヴェニウス代数が使われます) によって構成されます。この発想を押し出して整理したユーモアあふれる論文 [6] があります。この (1+1)TQFT の発想の効果として、不変量が「写像的」な意味から「関手的な」意味をもち躍動的で代数的な振舞いをし始めたようです：つまり、2 つの結び目が R^4 内でコボルディズムがあれば、結び目ホモロジーの射が構成されます。

この発想は発展をみせており、skein relation から完全列への圏化、colored Jones 多項式の圏化 [7]、slice genus の判定 [8]、ブレイド群の圏化による 2-圏による統一 [9]、に役立っているらしいです。

他にも、Homfly,Kaufmann 多項式も Khovanov-Rozansky によって Categorification されました。Vassiliev の圏化も『局所的な交点の差をコボルディズムとみて、この map の index とみよう』という発想もあるようです []。

今後のスローガンとして『量子不変量を圏化して、そこでの豊富な性質をみよう』『不変量の構成する根源的な代数から圏化しよう』『3 次元多様体不変量を圏化しよう』があるように僕は思えます。他の接近方法にも、Flag variety の coherent sheaf をつかった $U_q(sl_2)$ の圏化など幾何的表言論からのアプローチ [10 など]、Gukov らによる超ヒモ理論からの洞察 [11] などあるようです。また他方でゲージ理論から Heegaard Floer Homology というものが導入され、Alexander 多項式も Categorification されました (これは Grid というものを使って、組合せ的に定義できます) ので、この統一的解答も目標に掲げれていると思われます。

圏化などの発展を見ていますと、大変混沌とした状況になっているように (僕には) 感じえますが、この中で何が自分にあっているか見定めて研究していけたらと思います。

参考文献

[1] (Ohtsuki) Quantum invariants ,World scientific 2002
[2]Turaev,The Yang-Baxter equation and invarinats of links,Invet.Math.92(1998)527-553
[3] Bar-Natan,On the Vassiliev knot invariants,Topology,34(1995)423-472
[4] (大槻知忠　編集) 量子不変量　　3 次元トポロジーと数理物理の遭遇, 日本評論社
[5](Khovanov)a categorification of the Jones polynomial,Duke Math.J.101(2000)359-426
[6](Bar-natan) Khovanov's homology for tangles and cobordisms,geometory and topology (2005)1443-1499
[7](Khovanov) Categorification of the colored Jones polynomial,J.Knot Theory Ramific.14(2005) 111-130

[8](Rusmussen)Khovanov homology and the slice genus,arXiv:math.GT/0402131
[9](Khovanov and Thomas)Braid cobordisms,triangulated categories,and flag varieties,math.QA/0609335
[10] (Hao Zheng) a geometric categorification of tensor products of $U_q(sl_2)$-modules