三重点数4の二次元結び目の分類

山本 顕哲

平成 19 年 8 月 3 日

1　最近の研究概要

通常の結び目は $\mathbb{R}^3$ または S^3 に含まれる S^1 の PL 同相類であるが、これの次元を一つあげた 2− 結び目というものについて研究している。これは、$\mathbb{R}^4$ に含まれる S^2 の PL 同相類である。

$1, 2, 3$ 個の三重点を持つ 2− 結び目は全て、三重点を持たない 2− 結び目（ribbon 2− 結び目と呼ばれる）と同型になる [3]。一方、4 個の三重点を持つ 2− 結び目で、どの ribbon 2− 結び目とも同型にならないものは存在することが知られている [2]。そこで、4 個の三重点を持つ 2− 結び目を quandle cocycle 不変量 [1] で分類するのが現在の研究目標である。

以下の補題 2 つを証明した。今後は、$\pi(K) \setminus \Sigma$ の各連結成分が単連結な場合について考察を深めるつもりである。

2　2− 結び目の簡単な性質

以下、向きのある 2− 結び目のみを考えることにする。また、向きは結び目に垂直なベクトルで表すものとする。

2.1　二重点、三重点、分岐点

まず、射影 $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z, t) \mapsto (x, y, z)$ を固定する（ここでの t を**高さ**と呼び、点 $X \in \mathbb{R}^4$ の高さを $h(X)$ で表す）。すると、2− 結び目 K を、$\pi(K)$ が**二重点・三重点・分岐点**のみを特異点として持つようにできる。また、二重点・三重点・分岐点の集合をそれぞれ $M_2,\ M_3,\ S$ とおく。ここで $M_3,\ S$ は孤立点の集合として表れ、M_2 は開いた弧と単純閉曲線の非交差和として現れる。M_2 の連結成分で、弧となるものを、$\pi(K)$ の**辺**と呼ぶ。また、M_2 の境界は $M_3 \cap S$ に含まれる。

また、$M_2 \cup M_3 \cup S$ を Σ で表す。Σ は、各頂点が 1 位か 6 位のグラフとなっている。1 位の頂点は分岐点に対応し、6 位の頂点は三重点に対応し、辺は二重点に対応する。

2.2　Alexander 数

以下のように、$\mathbb{R}^3 \setminus \pi(K)$ の各領域に数字を割り振る。

1. $\pi(K)$ で区切られた 2 領域には連続した数を入れる
2. $\pi(K)$ の各点における向きに従って数が増える

ここで、$X \in \mathbb{R}^3$ に対し、$N(X)$ を十分小さい X の近傍とする。$N(X) \setminus \pi(K)$ における Alexander 数の最小値を、X の **Alexander 数**と呼び、$\lambda(X)$ で表す。また、辺 $E \subset M_2$ に対して、その上の点の Alexander 数は一意に定まる。ここで $\lambda(E)$ を E 上の各点の Alexander 数とする。

2.3　$2-$ 結び目の図式

各二重点 $D \in M_2$ に対して、$\pi^{-1}(D) \cup K = \{D^1, D^2 | h(D^1) < h(D^2)\}$ と表せる。ここで、$N^i(i=1,2) \subset K$ を十分小さい D^i の正則近傍とする。$\pi(D^1)$ を **下の層**、$\pi(D^2)$ を **上の層** と呼ぶ。一方、三重点に対しても同様の考察ができる。各三重点 $T \in M_3$ に対して、$\pi^{-1}(T) \cup K = \{T^1, T^2, T^3 | h(T^1) < h(T^2) < h(T^3)\}$ と表せる。ここで、$N^i(i=1,2) \subset K$ を十分小さい T^i の正則近傍とする。$\pi(T^1), \pi(T^2), \pi(T^3)$ をそれぞれ **下、中、上の層**、$\pi(D^2)$ と呼ぶ。$2-$ 結び目 K の**図式**とは、$\pi(K)$ にこれらの層の上下の情報を入れたものである。

2.4　符号と向き

M_2 は一次元多様体。各二重点 D に対して、n_i を D^i の近傍の向きとした時、(n_2, n_1, v) の向きが正になるように M_2 に向きを入れる。また、各二重点 T に対して、n_i を T^i の近傍の向きとした時、(n_3, n_2, n_1) の向きがを T の**符号**と呼ぶ。。

2.5　三重点の種類

$2-$ 結び目の図式は、元の結び目を ambient isotopy で変形することによって何通りも得られる。それらの中で、三重点の数が最小になる図式を**最小図式**と呼ぶ。もちろん最小図式は一意ではない。最小図式においては、Σ において、三重点と隣り合う分岐点は高々2 個である（三重点 T と分岐点 B が隣り合うとは、$f : [0,1] \to \Sigma,\ f(0) = T,\ f(0,1) = E,\ f(1) = B$ となる連続写像 f と辺 E が存在することである）。

3　Quandle

以下の条件を満たす集合と演算の組 $(Q; \triangleleft, \blacktriangleleft)$ を quandle と呼ぶ。

1. $\forall a \in Q,\ a \triangleleft a = a = a \blacktriangleleft a$
2. $\forall a, b \in Q,\ (a \triangleleft b) \blacktriangleleft b = a = (a \blacktriangleleft b) \triangleleft b = a$
3. $\forall a, b, c \in Q,\ (a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c),\ (a \blacktriangleleft b) \blacktriangleleft c = (a \blacktriangleleft c) \blacktriangleleft (b \blacktriangleleft c)$

3.1　quandle 複体

次に、quandle homology を定義する。

${C_n}^R$ を、n 個の Q の元の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で生成される自由 abel 群とする。境界準同型 ∂_n を以下で定義。

$$\partial_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [(x_1, x_2, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_n) - (x_1 \triangleleft x_i, x_2 \triangleleft x_i, \cdots, x_{i-1} \triangleleft x_i, x_{i+1} \cdots, x_n)]$$

また、${C_n}^D \subset {C_n}^R$ を、$\exists i, x_i = x_{i+1}$ を満たす $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で生成される自由 abel 群とし、${C_n}^Q = {C_n}^R / {C_n}^D$ とする。∂'_n を、${C_n}^R$ から誘導される ${C_n}^R$ の境界準同型とすると、abel 群 A に対して、${C_Q}^*(Q; A) = \mathrm{Hom}({C_*}^Q(Q), A),\ \delta = \mathrm{Hom}(\partial', \mathrm{id})$ は cochain 複体となる。

また、ここからコホモロジー ${H_Q}^*(Q; A)$ が定義できる。

$3-$cocycle $\phi \in {Z_Q}^3(Q; A)$ は、以下の条件を満たす。

$$\phi(p,q,r)\phi(p \triangleleft r,\ q \triangleleft r,\ s)\phi(p,r,s) = \phi(p \triangleleft q,\ r,\ s)\phi(p,q,s)\phi(p \triangleleft s,\ q \triangleleft s,\ r)$$

3.2 quandle cocycle 不変量

定義 3.1. *K を 2− 結び目とする。次の条件を満たしながら $\pi(K)\setminus\Sigma$ の各成分に対して quandle Q の元を対応させることを彩色と呼ぶ。*

1. N を、ある二重点 D の十分小さい正則近傍とし、$\pi^{-1}(D)\cup K=\{S_1,\ S_2\}$ とする。$\pi(S_1)\cup\pi(S_2)\in M_2$ とした時、$S_1\cup S_2\setminus\Sigma$ は 4 つの領域に分けられる。${S_i}^1$ を S_i の Alexander 数の小さい方の領域とし、${S_i}^2$ を S_i の Alexander 数の大きい方の領域とする。${S_i}^j$ に ${q_i}^j\in Q$ を対応させるとすると、${q_2}^1={q_2}^2,\ {q_1}^1\lhd{q_2}^1={q_1}^2$ を満たす。

ここで、quandle cocycle 不変量を定義する。

まず、quandle $(Q;A)$ と $\phi\in {Z_Q}^3(Q;A)$ を固定し、また彩色を一つ固定する。で、各三重点に対して、その点の近傍での $\pi(K)\setminus\Sigma$ の色を (a,b,c) とした時、$\phi(a,b,c)\in A$ が定まる。これを三重点の weight と呼ぶ。weight の積を全ての三重点に対して取ったものを weight 和と呼ぶ。

次に、彩色の固定を外す。で、各彩色に対して求まる weight 和を形式的に足す。足されたもの $\in\mathbb{Z}[A]$ を、quandle cocycle **不変量**と呼び、$\Phi_\phi(K)$ で表す。これは、2−knot の不変量になっていて、また quandle cohomology の元から一意に定まる。また、$\Phi_\phi(K)\in\mathbb{Z}1_A\cong\mathbb{Z}$ の時（言い換えれば、どんな彩色をしても weight の和が A の単位元になる時)、$\Phi_\phi(K)\in\mathbb{Z}$、または quandle cocycle 不変量が自明であると呼ぶ。

4 本題

補題 4.1. *Q を、$a\lhd b=a\Rightarrow a=b$ を満たす quandle とする。もし、Q のある彩色に対して 2− 結び目 K の weight の和が 0 で、K が三重点を 4 個持つなら、各三重点の Alexander 数は全て等しい。*

略証：三重点の Alexander 数と Σ のグラフ構造に注目して分類すると、以下の可能性がある。

1. $\lambda(T_1)=\lambda(T_2)<\lambda(T_3)-1=\lambda(T_4)-1,\ \epsilon(T_1)=-\epsilon(T_2)=\epsilon(T_3)=-\epsilon(T_4)$
2. $\lambda(T_1)=\lambda(T_2)=\lambda(T_3)-1=\lambda(T_4)-1,\ \epsilon(T_1)=-\epsilon(T_2)=\epsilon(T_3)=-\epsilon(T_4)$
3. $\lambda(T_1)=\lambda(T_2)=\lambda(T_3)=\lambda(T_4),\ \epsilon(T_1)=-\epsilon(T_2)=\epsilon(T_3)=-\epsilon(T_4)$

1. の場合は、Σ 上で T_1,T_2 と T_3,T_4 が同じ連結成分上にない。ここで、T_1,T_2 に関して有り得る可能性を全てあげることによって、*weight* の和が 0 になることが分かる。
2. の場合は、Σ をただのグラフとして見た場合、weight の和が 0 にならないものが存在する。しかしこの場合、$\pi^{-1}(\Sigma)\cup K$ は一点のみで横断的に交わる 2 つの円周を含む。これは K が S^2 と同相であることに矛盾する。3. の例としては、2−twist spun trefoil があげられる。q.e.d.

ここで、各三重点の Alexander number を単純に λ と置く。$\Sigma^\epsilon(\epsilon\in\{-,+\})$ を、$x\in M_2\cup S|\lambda(x)=\lambda+(\epsilon+1)/2$ で定義。

補題 4.2. *Q を、$a\lhd b=a\Rightarrow a=b$ を満たす quandle とする。もし、Q のある彩色に対して 2− 結び目 K の weight の和が 0 で、K が三重点を 4 個持ち、また Σ^- が分岐点を 4 個含むなら、quandle cocycle 不変量は以下の可能性がある。*

1. 整数

2. 2-twist-spun trefoil と一致

3. 2-twist-spun trefoil の向きを逆にしたものと一致

Σ^- のグラフ構造から一つ一つ調べて証明した。

系 4.3. *$Q=R_3=\{0,1,2|a\lhd b=3-a-b\}$ とし、$\phi(x,y,z)=(x-y)((2z-y)^3+y^3-2z^3))/p,\ \phi\in Z^3(Q;\mathbb{Z}_3)$ とする。もし、Q のある彩色に対して 2− 結び目 K の weight の和が 0 で、K が三重点を 4 個持ち、また Σ^- が分岐点を 4 個含むなら、quandle cocycle 不変量 $\in\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3]\cong\mathbb{Z}[t]/(t^3-1)$ は以下の可能性がある。*

1. 整数

2. $3+6t$

3. $3+6t^2$

系 4.4. Q を、$a \lhd b = a \Rightarrow a = b$ を満たす *quandle* とする。もし、Q のある彩色に対して 2− 結び目 K の *weight* の和が 0 で、K が三重点を 4 個持つなら、分岐点は高々4 個。

略証： 補題 4.2 の証明から、Σ^- が分岐点を 4 個含むなら Σ^+ は分岐点を持たないことが分かる。向きを逆にすると、Σ^+ が分岐点を 4 個含む場合は Σ^- が分岐点を持たないことが分かる。Σ^+, Σ^- ともに分岐点は $0, 2, 4$ 個のどれかなので、高々4 個であることが分かる。q.e.d.

参考文献

[1] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito: *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355**(2003)3947-3989

[2] S.Satoh, A.Shima: *The 2-twist-spu trefoil has the triple point number four*, Trans.Amer.Math. **356**(2004)1007-1024

[3] S.Satoh: *No 2-knot has triple point number two or three*, Osaka J. Math. **42**(2005)543-556