複素領域の常微分方程式論 入門

岩木耕平* (京都大学 数理解析研究所)

微分方程式論は, 物理法則を記述する基礎方程式として生まれ, 今では解析学の中心的な研究対象のひとつになっています. その中でも, 研究対象や知りたいことによって研究手法は様々です. 今回は講演者が専門とする「複素領域の常微分方程式論」について, 線型の常微分方程式に限って基本的概念や研究手法について解説したいと思います. 「複素領域の」というのは, 「独立変数が複素数平面のある領域上を動く」という意味です.

複素領域の常微分方程式論の研究は大雑把には「局所理論」と「大域理論」の 2 つの部分に分かれます. 局所理論は, 微分方程式の特異点における解の級数展開などを調べる部分です. 複素領域上だと, 解は一般に特異点の周りで分岐する多価函数になり, それらの解析接続の様子を記述するのが「モノドロミー行列」や「Stokes 行列」と呼ばれる概念です. これらを解析する部分が大域理論ですが, これは非常に難しいことが知られています. 複素領域の分野のみならず, 微分方程式論全体の中でも「微分方程式の解の大域的な性質を詳細に解明すること」は最重要課題のひとつです. 最後に, 微分方程式の大域解析に対して強力な「完全 WKB 解析」についてもお話ししたいと思います.

- 1 コマ目：微分方程式に対して「確定特異点」および「不確定特異点」という 2 種類の特異点を定義し, それらの特異点における解の性質をまとめます.

- 2 コマ目：モノドロミー行列や Stokes 行列を定義します. 上でも述べたように, これら大域的な量が計算できることは稀です. ここでは「Gauss の超幾何微分方程式」と呼ばれる, モノドロミー行列が具体的に計算できる非自明な例を紹介します.

- 3 コマ目. 完全 WKB 解析の基礎について解説します. この手法は量子力学の Schrödinger 方程式の近似解法として用いられていた WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin) 法を数学的に定式化したものです. 結果のみの紹介になりますが, 完全 WKB 法によりどのようにモノドロミー行列が計算されるのかを紹介したいと思います.

物理学だけでなく, 微分方程式は最近では数学の様々な分野に顔を出しています. その中でもモノドロミー行列や Stokes 行列の果たす役割は重要で, 例えば行列の成分が幾何学的な意味を持つことがあります. 微分方程式の研究の歴史は長く, 古典的な対象ではありますが, 同時に今後の数学の興味深いトピックでもあるように思います.

参考文献

[1] 原岡喜重：超幾何関数, 朝倉書店, 数学の風景 7, 2002.

[2] 河合隆裕, 竹井義次：特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 現代数学の展開, 1998.

[3] 高野恭一：常微分方程式, 朝倉書店, 新数学講座 6, 1994.

*iwaki@kurims.kyoto-u.ac.jp