今後の研究計画

浅芝 秀人

研究課題は大きく分けて次の3つにまとめられる。

(1) 導来同値のための双圏論的被覆理論
(2) 導来同値分類
(3) 加群の分解理論 (CREST 研究の継続)

(1) はこれまで導来同値分類で用いてきた群作用による被覆理論を圏の弱作用に一般化することを目指し，(2) は導来同値のための被覆理論を用いて，被覆で統制される多元環のクラスを導来同値のもとで分類することを目指している。(3) は CREST 研究 “ソフトマター記述言語の創造に向けた位相的データ解析理論の構築” で必要となるパーシステンス加群の直既約分解に必要な基礎理論とそのアルゴリズムを与えることを目指している。以下紙面の関係で (1), (2) についてだけ述べ (3) は省略する。

(1) 以下 G を群とする。多元環の表現論における被覆理論は，Gabriel によって関係付きクイバーの形に書ける線形圏の代数的な被覆関手として定式化された。応募者は論文 [20] で，この代数的定式化を，自然変換の族を用いて一般の線形圏の間の G 被覆関手に一般化し，これを用いて新たな導来同値を導く道具を与えた。すなわち，2つの G 被覆 $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ と $\mathcal{C}' \to \mathcal{B}'$ があるとき，(a) $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ の導来同値から $\mathcal{B} \simeq \mathcal{C}/G$ と $\mathcal{B}' \simeq \mathcal{C}'/G$ の導来同値が導かれるための十分条件，および (b) $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ の導来同値から $\mathcal{C} \simeq \mathcal{B}\#G$ と $\mathcal{C}' \simeq \mathcal{B}'\#G$ の導来同値が導かれるための十分条件得た。ここで $\Bbbk$ を可換環とし，$\Bbbk$ 小圏全体と関手と自然変換からなる 2 圏を $\Bbbk$-**Cat** とおく。論文 [22] では，(a) を小圏の余擬作用のもとでの 2 圏論的被覆理論の場合に一般化した。その際，軌道圏の構成は，グロタンディーク構成 $\int X$ に一般化される。これは $\Bbbk$ 圏 $X(i)$ $(i \in I)$ を貼り合わせた $\Bbbk$ 圏と見ることができる。玉木大氏に拡張された圏作用の場合の smash 積の概念を用いて (b) の結果を圏作用の場合に一般化することを計画し，ほぼ完成している。さらに，$\Bbbk$-**Cat**$^{\mathrm{b}}$ を，$\Bbbk$ 小圏全体と $\Bbbk$ 小圏上の両側加群と両側加群の間の射からなる双圏 (bicategory) とすると，lax 関手 $X\colon I \to \Bbbk$-**Cat**$^{\mathrm{b}}$ にもグロタンディーク構成が定義でき，はるかに広範囲の $\Bbbk$ 圏が構成できる。(a) の結果はこの設定にまで拡張できつつあるので，これを完成させる。また，この設定においても (b) の結果を一般化することを計画している。以上に加えて，$\Bbbk$ 圏を微分次数圏に拡張した設定でも同様の研究を行うことと，G 前被覆を 2 関手によって体系的に導く方法を与えその応用も考える。

(2) 有限大域次元をもつ多元環 A の反復圏を $\hat{A}$ とし，$\hat{A}$ の自己同型 g のうち，$\hat{A}$ の対象集合が有限個の g 軌道しか持たないものをとると，軌道圏 $\hat{A}/\langle g\rangle$ は自己入射的多元環となる。これらは自己入射多元環全体における非常に重要なクラスを形成し，群環の重要なブロックも含む。このクラスを，導来同値のもとで分類することが，研究の大きな目標である。g の形により理論的扱いが 2 つに別れる：(i) g が $\hat{A}$ の中山自己同型の巾と，$r(A^{[0]}) \subseteq A^{[0]}$ を満たす $\hat{A}$ の自己同型 r の積の形となっている場合（ただし $A^{[0]}$ は $\hat{A}$ の 0 次部分）; (ii) g の巾が $\hat{A}$ の中山自己同型になっている場合。群環のブロックが含まれるのは (ii) のタイプである。現在までに (i) については，A が tree 型の遺伝多元環と導来同値である場合について分類を完成させた (論文 [15, 24])。現在，A が $\tilde{A}_n$ 型遺伝多元環と導来同値である場合に，(i) のタイプの分類を完成させようとしている。この場合にはすでに Bocian–Skowroński によって定理が提出されているが，応募者はその分類に誤りを見つけた。これが完成すると，論文 [24] の結果と合わせて A が Euclid 型遺伝多元環と導来同値である場合について導来同値分類が完成する。これ以外にも，研究 (1) で開発した被覆理論を用いて (ii) のタイプの多元環のクラスについても分類を行う。これが完成すれば，特に群環のブロックの間の導来同値が取り扱えるようになるため，Broué の可換不足群予想に応用できるようになる。