今後の研究計画

綾野孝則

1. Abel 関数の reduction

本研究では，種数 2 の bielliptic な超楕円曲線に付随する Abel 関数を Weierstrass の楕円関数で表示しました (論文リスト 1-3)．この結果の一般化を考察します．自然数 g に対して，種数 $2g$ の bielliptic な超楕円曲線 $\mathcal{X}$ を考えます．このとき，2 つの種数 g の超楕円曲線 $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ が存在して，$\mathcal{X}$ の Jacobi 多様体は $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ の Jacobi 多様体の直積と同種であることが知られています．本研究では，$\mathcal{X}$ に付随する Abel 関数を $\mathcal{X}_1$ 及び $\mathcal{X}_2$ に付随する Abel 関数で表示します．これにより，種数の高い Abel 関数の具体的な計算がしやすくなり，微分方程式の Abel 関数解の可視化などに貢献できると考えています．

2. テレスコピック曲線に対する Jacobi の逆問題

整数 $m \geq 2$ に対して，ある条件を満たす自然数列 $A_m = (a_1, \ldots, a_m)$ から $m-1$ 個の m 変数多項式が定まります．$\mathbb{C}^m = (x_1, \ldots, x_m)$ において，これらの多項式で定義されるアフィン代数曲線をテレスコピック曲線といいます．$m = 2$ のときは (n, s) 曲線と一致します．$(2, 2g+1)$ からは種数 g の超楕円曲線が得られます．V を種数 g のテレスコピック曲線とします．$P_1, \ldots, P_g \in V$ とします．V 上の g 個の正則微分形式 $\omega = {}^t(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ に対して，

$$u = \sum_{i=1}^{g} \int_{\infty}^{P_i} \omega$$

とします．P_i の x_1 座標を $x_1^{(i)}$ とします．V が超楕円曲線の場合は，$\{x_1^{(i)}\}_{i=1}^{g}$ は次の代数方程式の解として特徴付けられることが知られています (Jacobi の逆問題の解)．

$$x^g - \wp_{1,1}(u)x^{g-1} - \cdots - \wp_{1,g-1}(u)x - \wp_{1,g}(u) = 0 \tag{1}$$

$\wp_{1,i}$ は V のシグマ関数の対数微分で定義される Abel 関数です．この結果は (n, s) 曲線に拡張されました ([1])．本研究では，これをテレスコピック曲線に拡張します．即ち，テレスコピック曲線の場合に，$\{x_1^{(i)}\}_{i=1}^{g}$ を特徴付ける (1) の形の代数方程式を求めます．

3. Jacobi 多様体の部分多様体上の有理型関数が満たす微分方程式

私は，論文リスト 1-5, 1-6 において，種数 $g = 2, 3$ の超楕円曲線に対して，$\mathbb{C}^g$ 全体ではなく，シグマ関数の零点集合上で周期的になる $\mathbb{C}^g$ 上の有理型関数で解が書ける可積分方程式を導出しました．これは，KdV 方程式を 2 つのパラメータで変形した偏微分方程式になっています．種数 g の超楕円曲線のシグマ関数の零点集合は，Abel–Jacobi 写像による $g-1$ 個の点の像と一致します．今後は，論文リスト 1-5, 1-6 の結果を拡張し，一般の種数 g の超楕円曲線に対して，Abel–Jacobi 写像による $k(< g)$ 個の点の像の上で周期的になる $\mathbb{C}^g$ 上の有理型関数で解が書ける可積分方程式を導出します．これは KdV 方程式を $2g - 2k$ 個のパラメータで変形した偏微分方程式になると考えています．

参考文献

[1] J. Bernatska, D. Leykin, Solution of the Jacobi inversion problem on non-hyperelliptic curves, Lett. Math. Phys. **113**, 110, (2023).