これまでの研究成果

綾野孝則

Weierstrass により定義され，詳しく調べられた楕円シグマ関数 $\sigma(u)$ や楕円関数 $\wp(u)$ は様々な分野に応用されています．これらの関数は楕円曲線と相互に関連します．100 年程前に，Klein, Baker 等によって，超楕円曲線に付随する多変数のシグマ関数および Abel 関数 (楕円関数を多変数に拡張した関数) の具体的な理論が構築されました．1990 年代に，Buchstaber, Enolski, Leykin 等により，超楕円曲線を含む (n, s) 曲線と呼ばれる平面曲線に対するシグマ関数を用いた Abel 関数の理論が構築されました．私は，この (n, s) 曲線の理論を，情報科学の符号理論で取り扱われているテレスコピック曲線と呼ばれるより一般的な代数曲線の族まで拡張しました (論文リスト 1-8, 1-9)．

種数 g の超楕円曲線に付随する Abel 関数は $\mathbb{C}^g$ 上で $2g$ 個の周期を持つ有理型関数です．この関数は KdV 方程式を満たすことが知られています．私は，論文リスト 1-6, 1-7 において，種数 3 の超楕円曲線に対して，$\mathbb{C}^3$ 全体ではなく，シグマ関数の零点集合上で周期的になる $\mathbb{C}^3$ 上の有理型関数という新しいクラスの関数を考察し，この関数で解が書ける可積分方程式を導出しました (Buchstaber 氏との共同研究)．これは，KdV 方程式を 2 つのパラメータで変形した偏微分方程式になっています．

Abel 関数をより種数の低い Abel 関数で表示する問題 (reduction) を考えます．Enolski 等により，種数 2 の bielliptic な超楕円 Abel 関数が Jacobi の楕円関数で表示されています．私は，論文リスト 1-3 において，同じ Abel 関数を Weierstrass の楕円関数で表示しました (Buchstaber 氏との共同研究)．また，種数 3 の bielliptic な超楕円 Abel 関数を Weierstrass の楕円関数と種数 2 の Abel 関数で表示しました (論文リスト 2-2)．物理学や生物学において，Abel 関数の具体的な数値を計算することが必要になっています．Abel 関数の reduction formula を用いることで，種数の高い Abel 関数の数値を計算しやすくなります．本研究の結果は，これらの分野に貢献できると考えています．

シグマ関数の展開係数がどのような集合 R に含まれるかという問題を考えます．(n, s) 曲線の場合は，R として曲線の定義方程式の係数により $\mathbb{Q}$ 上生成される環がとれることが示されています ([2])．私は，論文リスト 1-10 において，この結果をテレスコピック曲線に拡張しました (中屋敷氏との共同研究)．(n, s) 曲線の場合は，R として曲線の定義方程式の係数と 1/2 により $\mathbb{Z}$ 上生成される環がとれるというより精密な結果が示されました ([3])．私は，この結果をテレスコピック曲線に拡張しました (論文リスト 1-1)．

1903 年の論文で，Baker は実超楕円曲線に付随する Abel 関数を定義し，それらの間の微分関係式を導く基本公式を与え，種数 1,2,3 の場合に微分関係式を明示的に記述しました．[1] では，これを用いて，種数 3 の場合に，実超楕円曲線の Abel 関数が KP 方程式を満たすことが示されました．私は，論文リスト 2-1 において，一般の種数の場合に，実超楕円曲線の Abel 関数の微分関係式を明示的に記述し，実超楕円曲線の Abel 関数が KP 方程式を満たすことを示しました (Buchstaber 氏との共同研究)．

参考文献

[1] S. Matsutani, Hyperelliptic solutions of KdV and KP equations: re-evaluation of Baker's study on hyperelliptic sigma functions, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001), 4721–4732.

[2] A. Nakayashiki, On Algebraic Expressions of Sigma Functions for (n, s) Curves, Asian J. Math. **14** (2010), 175–212.

[3] Y. Ônishi, Arithmetical Power Series Expansion of the Sigma Function for a Plane Curve, Proc. Edinburgh Math. Soc. **61** (2018), 995–1022.