

研究成果

江澤 樹 (えざわ たつき)

e-mail m14006q@math.nagoya-u.ac.jp

これまで、Hilbert 空間や Banach 空間で既に多くの不動点の近似定理が知られている。それらを CAT 空間において妥当と思われる仮定の元で同様に成立するかを検証する形の研究を行ってきた。Hadamard 空間 (完備 CAT(0) 空間) は Hilbert 空間の、Banach 空間とは別の方向への一般化であるから、定理としてもある種の一般化を生む研究である。例えば、私の研究では [1] がその典型を与える。[1] は完備 CAT(1) 空間において、有限個の写像 (妥当な仮定を設ける) が与えられた時に、それらの凸結合と合成から W-写像構成を用い、反復を多重化し、共通不動点の近似定理を得ている。これは Banach 空間において、有限個の写像の共通不動点の近似定理を得ている [3] と完備 CAT(1) 空間において 1 つの写像の不動点の近似定理を得ている [4] を発展させる形で行った研究結果である。各写像に対する仮定も良い具体例である resolvent や非拡大を含む形で証明ができていて、また、[2] において、完備 CAT(1) 空間において [1] における反復の多重化を収縮射影法や CQ 射影法と呼ばれている不動点の近似手法に対して、適用することでやはり、既に Hilbert 空間でよく知られている定理を CAT(1) 空間における定理に発展させることに成功している。なお、[2] においては有限個の写像に対して、非拡大であるという仮定を設けている。これは Hilbert 空間や Banach 空間における既存の結果においては妥当な性質であるが、CAT(1) 空間においては非拡大写像の重要な例をあげることができていない。そこで、写像に対して、具体例を多く含む仮定 (例えば、強擬非拡大かつ Δ -demiclosed) のもとでの定理への発展が期待される。論文 [2] 内では触れておらず、未発表ではあるが、木村, 高坂により定義された CAT(1) における resolvent (これは強擬非拡大かつ Δ -demiclosed という性質をもつ) ではその固有の性質も用いることで [2] の結果を証明することができている。

また、これからの研究に直接関係のある成果として、まだ論文にまとめるには至っていない段階であるが、[6], [7] を CAT(1) 空間での収束定理に発展させるために、これらの論文を精査し、CAT(0) 空間と CAT(1) 空間でどのように不等式評価の違いがあるのか、問題点を見つけることができている。また、これからさらに本格的に目的の証明を行う上で、手法になり得る不等式評価を [8], [9], [10], [11] からみつけてある。

参考文献

- [1] T. Ezawa and Y. Kimura, Halpern iteration for a finite family of quasicontractive mappings on a complete geodesic space with curvature bounded above by one, *Linear and Nonlinear Analysis* 7 (2021), 141-155. arXiv:1911.07064.
- [2] T. Ezawa, Convergence to a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings on the unit sphere of a Hilbert space, arXiv:2002.04305.
- [3] S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications, in: B.N. Prasad birth centenary commemoration volume. *Indian J. Math.* 41 (3) (1999), 435-453.
- [4] Y. Kimura and K. Sato, Halpern iteration for strongly quasicontractive mappings on a geodesic space with curvature bounded above by one, *Fixed Point Theory Appl.* 2013 (2013), Article ID 7.
- [5] Pakkaranang, Nuttapol; Kumam, Poom; Wen, Ching-Feng; Yao, Jen-Chih; Cho, Yeol Je, On modified proximal point algorithms for solving minimization problems and fixed point problems in $CAT(\kappa)$ spaces, *Math. Methods Appl. Sci.* 44(2021), no.17, 12369-12382.
- [6] Sahu, D. R.; Kumar, Ajeet; Kang, Shin Min, Proximal point algorithms based on S-iterative technique for nearly asymptotically quasi-nonexpansive mappings and applications, *Numer. Algorithms* 86(2021), no.4, 1561-1590.
- [7] Khatoun, Sabiya; Cholamjiak, Watcharaporn; Uddin, Izhar, A modified proximal point algorithm involving nearly asymptotically quasi-nonexpansive mappings, *J. Inequal. Appl.* (2021), Paper No. 83, 20 pp.
- [8] Bancha Panyanak, On total asymptotically nonexpansive mappings in $CAT(\kappa)$ spaces, *J. Inequal. Appl.*, 2014 (2014), 13 pages. 1, 1, 2.3, 2.3
- [9] Saipara, P., Chaipunya, P., Cho, Y. J. and Kumam, P., On strong and δ -convergence of modified S-iteration for uniformly continuous total asymptotically nonexpansive mappings in $CAT(\kappa)$ spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 8 (2015), 965-975.
- [10] Pakkaranang, N., Kumam, P., Cholamjiak, P., Suparatulatorn, R. and Chaipunya, P., Proximal point algorithms involving fixed point iteration for nonexpansive mappings in $CAT(k)$, *Carpathian J. Math.* 34 (2018), no. 2, 229-237.
- [11] Chanchal Garodia, Stojan N Radenović, On A Proximal-Point Algorithm For Solving the Minimization Problem and Common Fixed-Point Problem in $Cat(k)$ Spaces, *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 75, No. 2, July, 2023.