

今後の研究計画

福田瑞季 (産業技術総合研究所 MathAM-OIL)

今後の研究で取り組みたい問題は 4 次元以上の多様体の幾何構造と結び目の関係を明らかにすることである。そのために、大きく分けて以下の 3 つの課題について取り組む予定である。

- (1) K がトーラス結び目もしくは $m = 2$ のときの branched twist spin の完全分類
- (2) k 回ツイストスピニングによって得られる $k + 1$ 次元結び目の分類
- (3) branched twist spin の高次元化

(1),(2) について述べる。「これまでの研究について」で述べたように、申請者は branched twist spin の分類に関して結果を得てきた。また、定理 3. で後述したように、3 次元結び目の分類に関する結果も得ている。一般に、1 次元 k 回ツイストスピニングをして得られる $k + 1$ 次元結び目 $\tau_{m_k}(\tau_{m_{k-1}}(\dots \tau_{m_1}(K)\dots)) = \tau_{\mathbf{m}}(K)$ の基本群 $G(\tau_{\mathbf{m}}(K))$ の表示は

$$G(\tau_{\mathbf{m}}(K)) \cong \left\langle x_1, \dots, x_l, h_j \left| \begin{array}{l} r_1, \dots, r_l, \\ x_i h_j x_i^{-1} h_j^{-1}, \\ x_1^{m_j} h_j, \end{array} \right. \right\rangle \quad (j = 1, \dots, k), \quad (0.1)$$

である。異なるトーラス結び目でない素な 1 次元結び目 K_1 と K_2 に対し、 $m = \gcd(m_1, \dots, m_k)$ として、 $m \geq 3$ 以上かつ $Z(\pi_1^{orb} \mathcal{O}(K_i, m))$ が自明であれば、 $\tau_{\mathbf{m}}(K_1)$ と $\tau_{\mathbf{m}}(K_2)$ は $k + 1$ 次元結び目として同値でないことがすぐにわかる。しかしこの結果は k が大きくなればなるほど、完全分類からは遠い結果になる。そこでまず (1) として $m = 2$ の場合や K_i がトーラス結び目の場合を更に考察することで、branched twist spin の分類をより詳細に行うつもりである。注意として、定理 3. の仮定は結び目群の商群とオービフォルドの基本群との同型を保証するための仮定であり、結び目の分類に対して本質的かどうか知られていない。より具体的には、 K が双曲結び目、もしくはサテライト結び目の場合、 $Z(\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m)))$ は自明になることがわかっているが、トーラス結び目や合成結び目の場合自明になるかわかっていない [1]。これらの分類を行った後にそのアナロジーとして (2) の遂行が期待できる。

(3) Branched twist spin は S^1 作用と 分岐被覆写像によるツイストスパン結び目の逆像という 2 つの定義があるが、単に高次元化させた時に 2 つの定義が一致するかが問題となる。Branched twist spin のアナロジーとして 3 次元結び目を構成するために次の n_2 被覆写像を考える。

$$(M^5, \tau_{m_2, n_2}(\tau_{m_1, n_1}(K))) \rightarrow (M^5, \tau_{m_2, 1}(\tau_{m_1, n_1}(K)))$$

このとき一般に M^5 が S^5 と微分同相であるための条件は知られていない。この条件を調べるためには 5 次元多様体の分類、あるいは結び目のファイバーである 4 次元多様体の幾何構造の分類を要する。一方で、 S^5 上の S^1 作用を考え、その作用で不変な 3 次元球面の集合を branched twist spin と定義することを考えると、 S^5 上の S^1 作用の分類自体 Montgomery-Yang 問題と呼ばれる未解決問題となっている。そこで、 M^5 が S^5 と微分同相になると仮定する、もしくは具体的な作用に対して 3 次元結び目を構成するといった具体例の構成を基に、高次元多様体の幾何構造を研究し、結び目の分類との関係を探るつもりである。

参考文献

- [1] M. Fukuda and M. Ishikawa, *Twist spun knots of twist spun knots of classical knots*, arXiv:2409.00650.