

これまでの研究について

福田瑞季 (産業技術総合研究所 MathAM-OIL)

申請者はこれまでに、主に branched twist spin と呼ばれる 2 次元結び目について研究を行ってきた。Branched twist spin とは S^4 上の局所滑らかな S^1 作用による例外軌道と固定点によって構成され、定義から S^1 作用で不変な 2 次元結び目である。 S^1 作用から結び目補空間内のファイブレーションが誘導されるので、branched twist spin はスパン結び目を除いてファイバー結び目である。

Plotnick は周期的なモノドロミーを持つ 2 次元ファイバー結び目のクラスと branched twist spin のクラスが一致することを示した。よって 1 次元結び目におけるトーラス結び目のクラスが、2 次元結び目における branched twist spin といえる。Branched twist spin はツイストスパン結び目と分岐被覆写像からも構成することができる。1 次元結び目 K の m ツイストスパン結び目を $\tau_m(K)$ と書くことにする。 S^4 の $\tau_m(K)$ に沿った n 重分岐被覆は m と n が互いに素なとき、 S^4 と微分同相になることが知られている。 $\tau_m(K)$ の分岐被覆写像による逆像 $\tau_{m,n}(K)$ も 2 次元球面なので、 $\tau_{m,n}(K)$ は 2 次元結び目とみなすことができる。これを (m, n) branched twist spin という。

Branched twist spin を区別するにあたり、 K, m, n の 3 つのパラメータを変化させたときに結び目のタイプの变化を調べて得られた結果について紹介する。

定理 1 (F. [2]). 非自明な 2 つの branched twist spin $\tau_{m_1, n_1}(K_1)$ と $\tau_{m_2, n_2}(K_2)$ が異なるための十分条件は、次の 2 つの条件のうちいずれかを満たすことである。

- (1) m_1, m_2 は偶数、 $|\Delta_{K_1}(-1)| \neq |\Delta_{K_2}(-1)|$,
- (2) m_1 は偶数、 m_2 は奇数かつ $|\Delta_{K_1}(-1)| \neq 1$.

ここで、 $\Delta_K(t)$ は K のアレクサンダー多項式である。

定理 1 は Fox 微分を用いて branched twist spin の初等イデアルを計算し、比較することで得られる。また、既約な $SL_2(\mathbb{C})$ -metabelian 表現の数を比較することでも同じ主張が得られる。

定理 2 (F. [2]). m が奇数であるとき、 $K^{m, n}$ と $K^{m, m+n}$ は異なる結び目である。

定理 2 は、 $K^{m, m+n}$ が 4 次元多様体の手術の 1 つである Gluck twist によって $K^{m, n}$ から得られることと、位数が奇数のモノドロミーをもつ 2 次元ファイバー結び目は Gluck twist によって異なる結び目に変化することが知られているので、定理 2 を得る。

定理 3 (F.-石川 [3]). $m \geq 3$ とし、 K_1, K_2 を異なる素な 1 次元結び目で、トーラス結び目でないとする。 $Z(\pi_1^{orb} \mathcal{O}(K_i, m))$ が自明ならば 2 つの branched twist spin $K_1^{m, n}$ と $K_2^{m, n}$ は同値でない。

$Z(\pi_1^{orb} \mathcal{O}(K, m))$ が自明のとき、 $G(K^{m, n})/Z(G(K^{m, n}))$ が $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ と同型になるので、 $\pi_1^{orb}(\mathcal{O}(K, m))$ は branched twist spin の不変量である。Mostow の剛性定理や武内氏による sufficiently large な結び目に対するオービフォールドの分類を用いることで、定理が従う。

Zeeman のツイストスピニングは繰り返し行うことができる [4] ので、 $\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K_1))$ と $\tau_{m_2}(\tau_{m_1}(K_2))$ についても定理と同様の主張が成り立つ。ただし $m = \gcd(m_1, m_2)$ である。

参考文献

- [1] M. Fukuda, *Branched twist spins and knot determinants*, Osaka. J. Math. **54**, no.4, (2017), 679–688.
- [2] M. Fukuda, *The Gluck twist on branched twist spins*, arxiv:1811.05109.
- [3] M. Fukuda and M. Ishikawa, *Distinguishing 2-knots admitting circle actions by fundamental groups*, Rev. Mat. Complut., (2024). <https://doi.org/10.1007/s13163-024-00504-6>
- [4] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Am. math. Soc. **115** (1965), 471–495.