今後の研究計画 (2025年4月～)

2025年1月10日
古谷賢朗

調和積分論も一つの出発として楕円型作用素の大域的な研究により、多様体論と解析学にまたがる多くの深い知見がもたらされた。本研究でも、楕円型を含み主に劣楕円型作用素の大域的現象に関連する研究を行う予定である。

Laplace-Beltrami 作用素や Dirac 作用素がそれぞれ多様体の幾何構造に自然に付随する 2 階楕円型作用素、1 階楕円型作用素であるのに対して、ここでは多様体の sub-Riemann 構造とそれに付随する 2 階劣楕円型微分作用素が研究の中心の一つである。この幾何構造 (= sub-Riemann 構造) は接束に bracket 生成的な部分束の存在を仮定している。その対極の構造である葉層構造については古くから研究されているが、こちらに関しては多様体論と密接に関連した解析学的な研究がこれまで未開拓であることも研究するに十分意義があると考えている。

接触多様体やベキ零 Lie 群及びそのベキ零多様体はその構造を持つ多様体の代表例であり、Riemannian submersion の全空間はその両方の構造を持つ場合がしばしばあり研究対象は豊富である。又葉層構造の場合は、横断的楕円型作用素の概念は定義出来るが、解析的側面から見ると構造を直接反映した微分作用素は存在しない。一方、sub-Riemann 多様体上には構造の性質を反映した 2 階劣楕円型微分作用素 (= sub-Laplacian) が存在し、その意味でも Riemann の場合の Laplacian との対比においても研究するに値すると考えている。この作用素は Hörmander によって証明された sub-elliptic estimate(劣楕円型性) を満たすので、特にコンパクトの時はスペクトルの基本構造 (固有値、連続スペクトル) は楕円型と同じであるが、特性多様体が存在することより従来の位相的レベル (K− 理論) の枠組みだけではない新たな大域現象の可能性や、古典的によく知られた多様体が非自明なこの構造を持つかの研究も含め、解析的には Laplacian の持つ性質の類似の研究も多々あり、その困難さの中に楕円型作用素には見られない現象の更なる探究を行う。

具体的な問題としては、おおよそ以下の研究 (a) ～ (d) を同時並行的であるが数年に及ぶ計画を考えている:

(a)　ベキ零 Lie 群及びそのベキ零多様体は良い (= equi-regular) sub-Riemann 構造を持つ多様体の典型例である。その中で Clifford 代数に付随するベキ零 Lie 環 (= pseudo H-type Lie 環) の基本的な性質 (integral lattice の存在、分類、自己同型群の決定) の研究を行ってきた。24 年度に引き続き、ある特別なクラスの一様離散部分群の構成と分類の研究をノルウェーの共同研究者とで更に発展させる予定である。又これらによる compact nil-manifolds 上の Laplacian、sub-Laplacian の spectral zeta 関数の留数に関わるより具体的な研究や、zeta regularized determinant の具体的計算に関連する研究を行う。

特に今年度は新たに加わった共同研究者と共に、左不変 pseudo Riemann 計量を持った pseudo H-type Lie 群が geodesic orbit 多様体になるのかの決定問題に前半は集中する予定である。

(b) 25 年度も Radon 変換を Fourier 積分作用素論の枠組みでの研究続をける。24 年度には少し進展したが、(d) での具体例との関係を中心に継続する。

(c) Conic singularity を持つ多様体上の sub-Laplacian の熱核の研究を symbolic calculus 視点から行ってきたが、今だに不明な事柄が残り、25 年度も可能な限り進展に努める。

(d) Lie 群は様々な不変 sub-Riemann 構造を持っているが、特に compact 対称空間がいつも sub-Riemann 構造を持つかは一般的には不明である。対称空間に対して Lie 環構造を通じて構成可能な sub-Riemann 構造の存在を個別に調べ、関連する spectral zeta 関数の研究を行う。

また色々な群作用による等質空間の double fiberation により定義される Radon 変換の研究を通じて (b) の問題に対する具体例の研究を行う。