今後の研究計画

林 拓磨

表現の有理構造を追求する.

Loewy は**群 G の実有限次元既約表現の分類と自己準同型可除代数の決定方法**を与えた. Loewy によれば, G の実有限次元既約表現の同型類全体の集合と, G の複素有限次元既約表現の同型類の複素共役類の間に自然な全単射がある. また, G の複素有限次元既約表現 V に対して対応する実既約表現の自己準同型可除代数は, (自己共役な場合に) **指数**と呼ばれる V から定まる符号によって決定される.

Tits は標数 0 の体 F 上の連結簡約代数群 G に対して同様の分類理論を与えた. すなわち, G の有限次元既約表現の同型類全体の集合と, $\bar{F} \otimes_F G$ の有限次元既約表現の同型類の Galois 共役類の間に自然な全単射を Tits は与えた ($\bar{F}$ は F の代数閉包). また, $\bar{F} \otimes_F G$ の自己共役有限次元既約表現 V に対して対応する G **の既約表現の自己準同型可除代数 (の反対代数) を決定するような余輪体**を与えた (正確には余輪体自体は V の F 形式の存在に対する障害類として Borel–Tits によってその前に V を用いて記述する形で構成された). この余輪体を **Borel–Tits 余輪体**と呼ぶ. V が自己共役ではない場合は V の有理性の体と呼ばれる F の有限次拡大体 $F(V)$ を考えることで自己共役な場合に帰着することができる. この結果は**アファイン群概形に対して自然に一般化**することができ, これは上述の Loewy の結果の (G が有限な場合の) 自然な一般化になっている. このとき **Borel–Tits 余輪体が指数の一般化**に相当する.

論文 1, 5 はこれらの研究に連なるものである. 実際, 論文 1, 5 含めてこれらの研究の結果はすべて **Galois 降下に関する汎用的な議論**によって得られる. 私はこれらの研究を統一的に扱う枠組みを導入し, それに対して同様の結果を与える. すなわち, **体 F 上の既約対象を F の分離閉包 F^{sep} 上の既約対象の Γ 共役類 (Γ は絶対 Galois 群) によって分類する**. 正確には, ある F 線形アーベル圏の既約対象の同型類の集合と, ある F^{sep} 線形アーベル圏の既約対象の同型類の集合の Γ による商の間に自然な全単射を構成する. 大雑把には, これは F 上の理論が F^{sep} 上の理論によって理解できることを示唆する. 有理性の問題から F^{sep} 上の理論は F 上の理論よりわかりやすいことが多いという点でこの結果は意義深い. 例えば上述の Tits の研究では最高ウェイト理論を用いて G 上の表現の分類を支配的ウェイトを用いて記述していた. また, **F 形式の存在に対する障害類 (Borel–Tits 余輪体) を構成する**. この障害類を解析することで, **F^{sep} 上の既約対象 X の定義体**, すなわち, F の F^{sep} 内における有限次分離拡大 F' であって X が F' 上定義されるような **F' のうち極小なものを決定する**.

この結果を $(\mathfrak{g}, K)$ 加群に適用出来ることを確認し, **標数 0 の体上の既約 $(\mathfrak{g}, K)$ 加群の分類を与える**. また, コホモロジー誘導加群にこの理論を適用して**コホモロジー誘導加群の極小な定義体を与える**.