これまでの研究成果のまとめ

星野 浄生

2025 年 1 月 18 日

乱関数に関する微積分に関し, 以下の結果を得た.

(1) Ogawa 積分可能性 ([4])

Itô 過程の Ogawa 積分が Itô 積分を用いて表示されることが [6] で得られている. 私と數見哲也氏は, その拡張として Itô 過程の非因果的拡張である S-type Itô 過程の Ogawa 積分が Skorokhod 積分とその共役作用素を用いて表示されることを示した.

(2) 乱関数の SFC による同定 ([1, 2, 5])

Brown 運動 B で駆動される乱関数 $X_t = \int_0^t a(t)\, dB_t + \int_0^t b(t)\, dt$ の係数 $a(t), b(t)$ が, $L^2([0, L])$ の CONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関する確率 Fourier 係数 (SFC):

$$(e_n, dX) = \int_0^L e_n\, dX$$

で決定されるか, という [7] で提起された問に対して, $\int dB$ が Skorokhod 積分である場合の SFC (SFC-S) と $\int dB$ が Ogawa 積分である場合の SFC (SFC-O) を採用し, 以下の肯定的な答えを得た. 以下, FVP, $\mathcal{L}^{r,2}$ で, それぞれ有界変動な乱関数全体, 可微分性 r の 2 乗可積分 Wiener 汎関数全体を表す.

- SFC-S からの乱関数の導出 ([2, 5])
  (a) $a(t) \in \mathcal{L}^{1,2}$, $b(t) \in \mathcal{L}^{0,2}$ の導出 ([9, 10] の結果の拡張)
- SFC-O からの乱関数の導出 ([1, 2, 5])
  (a) $a(t)$ が $V_t \in$ FVP と Itô 積分過程 M_t と Skorokhod 積分過程 Z_t と $\mathcal{L}^{1,2}$ 関数の Hilbert-Schmidt 変換 W_t により $a(t) = V_t + M_t + Z_t + W_t$ と表されるときや, より一般の乱関数のときの $a(t)$, $b(t)$ の導出 ([8, 11] の結果の拡張)

(3) 確率微分可能性 ([3])

確率微分や 2 次変分は確率積分の逆演算に相当する基本的な演算であるが, 一般に, 2 次変分をもつ乱関数 X, Y の和は 2 次変分をもつとは限らない. そこで, V を 2 次変分をもつ乱関数としたとき, 2 次変分 $[\,]$ と V に関する確率微分 $\frac{d}{dV}$ が存在する乱関数のクラス:

$$Q(V) = \left\{ X : \text{乱関数} \;\middle|\; [X],\ \frac{dX}{dV}\ \text{が存在し},\ \frac{d[X]}{d[V]} = \left|\frac{dX}{dV}\right|^2 \right\}$$

は Itô 積分過程, Stratonovich-Fisk 積分過程, Skorokhod 積分過程の全体を含み, 線形空間をなすことを示した. この結果は, 2 次変分をもつ乱関数 X, Y の和が 2 次変分をもつための十分条件を与えるとともに, 確率積分の理論に依らず, 確率微分や 2 次変分の計算が統一的にできることを意味する. 尚, この結果は, (2)「乱関数の SFC による同定」に関する結果 [1] の証明に用いられる.

参考文献

[1] K. Hoshino, Identification of random functions from the SFCs defined by the Ogawa integral regarding regular CONSs (Probability Symposium), RIMS Kôkyûroku. **2116**, 95-104, (2019).

[2] K. Hoshino, Derivation formulas of noncausal finite variation processes from the stochastic Fourier coefficients, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, vol. 37. **2**, 527-564, (2020).

[3] K. Hoshino, On the stochastic differentiability of noncausal processes with respect to the process with quadratic variation, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, vol. 95. **8**, pp 1446-1473, (2023).

[4] K. Hoshino, T. Kazumi, On the Ogawa integrability of noncausal Wiener functionals, Stochastics. Vol. 91. **5**, 773-796, (2019).

[5] K. Hoshino, T. Kazumi, On the Identification of Noncausal Wiener Functionals from the Stochastic Fourier Coefficients, Journal of Theoretical Probability, vol. 32. **4**, 1973-1989, (2019).

[6] S. Ogawa, The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals, Japan J. Appl. Math. **2**, 229-240, (1985).

[7] S. Ogawa, On a stochastic Fourier transformation, Stochastics. Vol. 85. **2**, 286-294, (2013).

[8] S. Ogawa, Direct inversion formulas for the natural SFT, Sankhya. The Indian Journal of Statistics, Vol. 80-A, 267-279, (2018).

[9] S. Ogawa, H. Uemura, On a stochastic Fourier coefficient: case of noncausal function, J.Theoret. Probab. **27**, 370-382, (2014).

[10] S. Ogawa, H. Uemura, Identification of a noncausal Itô process from the stochastic Fourier coefficients, Bull. Sci. Math. **138**, 147–163, (2014).

[11] S. Ogawa, H. Uemura, Some aspects of strong inversion formulas of an SFT, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 35-**1**, 373-390, (2018).