今後の研究計画
(2025 年 4 月)

大阪公立大学
細野 竜也

以下で用いる引用番号は, 別紙の研究業績リストの論文番号に基づく.

1. 走化性方程式の時間大域解の有界性と漸近挙動:
これまでの質量臨界現象に関わる研究 (主に [3, 4, 6]) から, 一般次元での走化性方程式の初期値問題に対して時間大域可解性を決める初期質量の閾値 M^* の存在が明らかになった. ここでは, その時間大域解が最適な仮定, 即ち初期質量が M^* 未満の条件下で時間に関して一様有界であることを示す. 今回考える全空間の場合では解の空間遠方の挙動の制御が必要となり, 既存の手法では時間依存しないアプリオリ評価の導出は難しい. そこで, 先ず球対称解に焦点を当て, 定常解との関係性について考察する. その後, 対称減少配置法に基づく解析手法によって一般の解に対する有界性を導出し, この有界性から解の L^p 減衰評価も導く. また質量臨界現象下での時間大域解の漸近系は未解明なので, その問題を打開する.

2. 非線形拡散を伴う走化性方程式の解の時間大域挙動: 非線形拡散 $\partial_t u - \nabla \cdot (u^{\alpha-1}\nabla u)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ を伴う走化性方程式を考察する. n 次元ユークリッド空間の問題に対して, 走化性項との釣り合いから拡散臨界指数 $\alpha_{c,n} = 2 - 4/n$ が与えられ, この指数を境目に解の時間大域挙動が大きく変わることが考えられる. 本問題は, Ph. Laurençot 氏 (サヴォアモンブラン大学) との共同研究であり, $n = 4$ の線形拡散 ([4]) と $n \geq 5$ で退化型拡散に相当する臨界現象については既に取り組んでいる. 他方, 低次元 $n \leq 3$ における fast diffusion の構造を持つ場合は, 臨界指数 $\alpha_{c,n}$ 周りで予想とは異なる解の挙動を示したり, 非線形拡散と非局所非線形項両者が持つ非線形性の強さによって従来の方法が破綻したりする. そこで, 根本的な解の構成方法の確立や性質, また拡散効果と対を成す走化性項に寄る集中効果が, 具体的に, 特に臨界周辺で解の時間大域挙動にどの程度影響を与えるのかという問いに注目して解析を行う.

3. 準線形走化性方程式系のエネルギー構造を用いた解析とその応用:
準線形走化性方程式における, 情報力学由来の Fisher 情報量に相当した汎函数の定量的評価, 具体的には時間に関する単調性評価の導出を試みる. このような定量的評価は解の正則性や時間大域挙動, 爆発解の存在など幅広く有効に働くことが知られている. 他方, エネルギーの 2 階導函数に関する構造を新たに導出することは一般論が存在しないため容易ではない. そこで現在, 第一段階として Tomasz Cieślak 氏 (ポーランド科学アカデミー) と藤江健太郎氏 (東北大学) と共同で, 一般化された非線形拡散方程式 $\partial_t u = \nabla \cdot (a(u)\nabla u)$ $(a(0) < +\infty)$ に対応するエネルギーの 2 階導函数の時間単調性評価, 即ち凸性を考察している. これを基に, 解の定常解への収束やそのオーダー, 更には非局所項を備えた準線形走化性方程式への応用を図り, 解のより詳細な定量的評価を調べることを目標とする.

4. 非線形拡散方程式の符号変化解の構成と性質の解明:
符号変化解を許容した単純な非線形拡散放物型方程式 $\partial_t u = \Delta(|u|^{m-1}u)$ を考察する. 非負値解に対する構成方法は, Aronson–Peletier (1981) を発端に多くの手法が考察されてきているが, 符号変化解の構成に於いては取り扱いが困難であることが知られており, 符号変化する初期値に制限を付けずに解の構成手法を考察したのは porous medium 方程式に対する初期値境界値問題を扱った Brasco–Volzone (2022) の最近の結果である. ここでは, 楕円型の変分構造に着目し全空間上の初期値問題や fast diffusion 型拡散方程式への拡張, 更には方程式に反応項 $f(u)$ を付けた際の解析, 加えて, Brasco–Volzone で得られた符号変化解に対するコンパクト台の有限伝播性について比較原理などを駆使して解析を図る.