

これまでの研究成果のまとめ (2025 年 4 月)

大阪公立大学
細野 竜也

キーワード: 非線形偏微分方程式; 走化性; 閾値; 時間大域解; 有限時刻爆発解

以下で用いる引用番号は, 別紙の研究業績リストの論文番号に基づく.

これまでの研究概要

これまで, “走化性”と呼ばれる生物現象に基づいて数理モデル化された非線形偏微分方程式の解の時間大域挙動について興味を持ち, 研究を行ってきた. 走化性から定式化される数理モデルは, 一般的に細胞密度と化学物質の濃度を表す未知関数を含み, 放物型-放物型あるいは放物型-楕円型の連立系で与えられる. 特にそれら方程式系は, ある化学物質の信号によって駆動する細胞や生命体の運動のようすを表し, 系は拡散項及び (主に集中を促すような) 化学反応による非線形相互作用項によって支配される.

具体的に解の時間大域挙動を解析するにあたり, 方程式系に備わる質量保存則 (L^1 -保存則) 及びエントロピー構造, さらに「拡散」と非線形項から生じる「集中」といった相反する効果の解析的な釣り合い, 即ち方程式系が持つ臨界構造に着目する. その指標の一つとして, “臨界空間”があり, これは方程式を不変に保つ解の尺度変換の下でノルム不変とするような函数空間のことを指す. 藤田-加藤の原理と呼ばれるこのような理論の上での解析は, 解の時間大域的安定や特異性の生成 (有限時刻爆発など) といった相反する挙動を解析的に捉える際の指標となる. 特に, 走化性方程式の解は質量を保存しながら時間発展する特徴を備えるため, 初期質量の大きさや形状で対応する解がどのように変化するかを解析的に考察したい.

臨界領域における解の時間大域挙動と質量臨界現象 ([2, 3, 4, 6]): ここでは, 解の質量保存 (L^1 -保存) の観点から上述の臨界空間が L^1 空間で与えられるような場合に焦点を当てる. この場合, “質量臨界”と呼ぶべき解の有限時刻爆発が起こるかどうかを決定する初期質量に対する閾値 M^* がしばしば現れる. 即ち, 初期質量が M^* 未満ならば解は時間大域的に安定に存在するが, 初期質量が M^* より大きければ解は有限時刻で爆発し得る. 実際, 2次元全空間では $M^* = 8\pi$ で与えられることが知られている.

主にこれまで, アルツハイマー病から派生した放物型-楕円型ないし放物型-放物型の走化性方程式を考察してきた. そこで, 4次元全空間上の質量臨界では $M^* = (8\pi)^2$ で与えられることを同定した. 有界領域上で考察された既存の藤江-仙葉理論 (2017, 2019) に対して, 非有界領域から生じる解の空間遠方の制御を擁する点で解析手法が異なり, 非負値性が保たれる修正エントロピーの導入と4階楕円型方程式に対するブレジス-メルル型不等式, 対称減少再配置法による函数不等式を新たに導出し解の先験的評価を導いた ([2, 3, 4]). また [6] では, 一般化放物型-楕円型の走化性方程式を考察し, 時間大域可解性に対する n 次元の初期値の臨界質量 M^* の同定, 及び初期値の形状の同定を行った.

優臨界領域における解の時間大域挙動 ([1, 5]): 優臨界となる空間においては, 閾値の同定は格段に困難となり未解明な領域であるが, Shannon の不等式とその最良定数を用いることでエントロピーの下の評価を導出し, 解の有限時刻爆発に対する初期条件を得た. さらに, 初期値にある小ささを課すことで解の時間大域適切性も得られた.