これからの研究の方針

いくつかの記号についてはこれまでの研究の概要を参照のこと.

1. **Laguerre 型の重みに関する Lagrange の補間多項式**: $\mathbb{R}^+ := [0,\infty)$ 上の重み w_ρ と連続関数 f について, 重み $w_{\rho*}$ についての Lagrange の補間多項式 $L^*_{n,\rho^*}(f)$ が重み w_ρ に関して f に収束する, 即ち
$$\lim_{n\to\infty}\|(L^*_{n,\rho^*}(f)-f)w_\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}=0 \tag{C}$$
が成立する条件を求める. これまで $p=2$ および $1<p<2$ 場合に成立する条件を既に示すことが出来た. 一方で, $2<p<\infty$ の場合, 重み $\Phi^{*(1/2-1/p)^+}(x)w_\rho(x)$ について (C) に準ずる結果を得た. これらに関しては $p=2$, $1<p<2$, $2<p$ の証明の仕方が異なっており, それに伴って条件もそれぞれの場合で異なっている. とくに $2<p$ の場合はさらに煩雑になっており, 各条件の p についての連続性が不明である. さらにこれらの収束で n を止めたときの誤差の評価も今後の重要な課題である.
ここで, Lagrange の補間多項式の基本 node に新たに node を追加して定義される modified Lagrange interpolation polynomials を扱う研究が知られている. これを用いることで通常よりもよい評価が得られたり関数のクラスの条件が緩和された結果が得られているが, これらの研究は Freud 型のみで考察されている. これを Erdős 型に拡張することも上記の問題へのアプローチとなるだろう.
2. **de la Vallée Poussin 平均**: 現在のところ, 評価
$$\|(f-v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})}\le CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w;f). \tag{A}$$
が精密なものであるか否かは不明である. T の次数をより下げられる可能性はある. さらに Erdős 型重みに付いた増大度の条件 $T(a_n)\le c\,(n/a_n)^{2/3}$ も何らかの形で弱められる可能性もあるが, 未だそこには至っていない.
また, これまでに de la Vallée Poussin 平均の微分の L^p 有界性を以下の形で示している: w は $\mathcal{F}(C^2+)$ のより滑らかな部分集合 $\mathcal{F}_\lambda(C^4+)$ とする. $T^{(2j+1)/4}fw\in L^p(\mathbb{R})$ のとき $2\le p\le\infty$ について
$$\|v_n(f)^{(j)}w\|_{L^p(\mathbb{R})}\le C\left(\frac{n}{a_n}\right)^j\|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^p(\mathbb{R})} \tag{B}$$
が任意の $1\le j\le k$ 及び $n\in\mathbb{N}$ について成り立つが, 現在は (B) が $1\le p\le 2$ の場合に成立するかは不明である. de la Vallée Poussin 平均の L^p 有界性を証明する際に L^1 の双対定理と Riesz-Thorin の補間定理を用いたが, 微分の場合は T の非有界性のために L^1 ノルムの双対定理を利用できない. T の非有界性による評価の困難を解消する新たな方法を見付けることが解決の糸口となるだろう.
もう一つの興味深い問題として, 上述の Lagrange の補間多項式の研究において $\mathbb{R}$ 上の解析を経由することによる $\mathbb{R}^+$ 上の解析の手段を得たので, この手法を用いて $\mathbb{R}^+$ 上の de la Vallée Poussin 平均の収束について調べることも新たな課題である. $\mathbb{R}^+$ 上の多項式近似についての研究は, 大元である Laguerre 多項式の理論の一般化であり, 応用上重要な分野の一つである.
3. **2 変数の de la Vallée Poussin 平均**: 2 変数関数の $\mathbb{R}^2$ 上での近似も興味深い話題である. 現在は $W(x,y)=w_1(x)w_2(y)$ のように 1 変数の積に変数分離出来る場合について, 1 変数の場合に示した結果のいくつかについて 2 変数でも同様の結果が成り立つことを確認し, その応用として Lagrange 補間多項式の合成による 2 変数関数の近似についての考察をすすめている. さらに, この結果を用いてより一般の 2 変数の重みに対しても考察を広げてゆくことも今後の課題となる.

(伊藤　健太郎)