今後の研究計画　　　　河井　公大朗

G_2-dDT 接続を用いた数え上げ不変量の構成を目指したい。私は、G_2-dDT 接続の場合はより深い結果が得られるのではと予想している。その理由としては、(i)（より正確には）G_2-dDT 接続は「グラフ的」な calibrated 部分多様体に対応しており、特異集合の扱いが容易と思われるため。(ii)[論文 15, 16] から、calibrated 部分多様体や G_2-instanton の場合より G_2-dDT 接続のモジュライ空間は性質が良さそうなため。(iii) 類似の dHYM 接続の場合にはかなり研究が進んでおり、calibrated 部分多様体より深い結果も出ているため。

[研究 1] 極小接続のバブルの解析

不変量の構成には、モジュライ空間のコンパクト化を深く調べる必要がある。それにはまずバブルがどのように生じるかを知る必要がある。Yang–Mills の場合は (ア) Price の単調性定理、(イ) Uhlenbeck-中島の ε 正則性定理から示された。この類似を極小接続に対して考えたい。

(ア) の類似は [論文 22] で示したが、結果がもう少し強くできるのではと考えている。実際 G_2-dDT 接続に限るとより強い主張を示せた。Lie 群作用や貼り合わせによって例を構成し、それをもとにどの程度まで結果を強くできるか考察する。また Yang-Mills の時のように「体積」V の（何らかの意味での）拡大縮小変換との関連性も見出したい。(イ) の類似には、V の「エネルギー密度」（積分因子）v が「Bochner 型不等式」を満たす（v がある発散形楕円型方程式の劣解になる）ことを示す必要がある。v は Yang-Mills 汎関数のエネルギー密度よりかなり複雑な形をしており、そのぶん処理が難しい。Yang-Mills の時に重要だった Weitzenböck 公式の類似は [論文 22] で示せており、もういくらかの技術的工夫で上手く評価できると見込んでいる。

[研究 2] G_2-dDT 接続を用いた (Morse-)Floer homology

「研究の概要 (Ⅲ) 」で述べたように、3 次元多様体の instanton Floer homology (IFH) の類似の観察が $G_2, \mathrm{Spin}(7)$-dDT 接続の間にも見られる。[研究 1] の更なる発展として、G_2-dDT 接続を用いた Floer homology の構成ができるかもしれない。そこで、まず IFH の類似として (a) シリンダー上の Spin(7)-dDT 接続の変形複体は Fredholm か？その (相対 Morse) 指数を上手く表示できるか？(b) 「ホロノミー摂動」でモジュライ空間が滑らかになるか？等を考えたい。その後、他の Floer homology の理論も参考にしつつ、(1) シリンダー上の Spin(7)-dDT 接続のモジュライ空間はコンパクト化可能か？(2)Floer homology が構成できたならば、それがどの程度幾何構造や摂動に依存するか？(3)A_∞ 構造などの高次の積構造が入るか？等について考えていきたい。

[研究 3] 接続の「ミラー」として定まる部分多様体の研究

今までは、部分多様体の概念を「実フーリエ向井変換」で接続側に移すということを考えてきた。最近トリノ大学の T. Pacini 氏と共同で、「実フーリエ向井変換」により、逆に接続側の概念を用いて、新しい部分多様体の概念が導入できないか考えている。

今のところ、G_2 多様体があるファイバー束の構造を持てば（この仮定はミラー対称性の文脈においては自然な仮定）、G_2-instanton の部分多様体側の「ミラー」(“Fueter-type section”) が定義できることがわかった。これは G_2-instanton のバブルの解析時に現れる Fueter section の亜種とも考えられ、更に calibrated 部分多様体、G_2-instanton、G_2-dDT 接続のように、ある汎関数を最小化することもわかった。

そこで、これまでと同様にまず “Fueter-type section” が G_2-instanton と類似の性質を持つか調べる。(i) 変形理論はどうなるか？(ii) Fueter-type section を臨界点にもつような汎関数はあるか？(iii) その勾配ベクトル場の積分曲線はどうなるか？(iv) バブルはどのように生じるか？等について考えていきたい。特に、通常の Fueter section に対して (iv) は知られているので、まずそれをもとに考えたい。