

今後の研究計画

2次元量子重力理論と位相的漸化式. CEO 位相的漸化式は2次元重力理論と関連する幅広い理論に普遍的に適用されるが、それに触発されて、2017年に、境界付きリーマン面のモジュライ空間の Weil-Petersson 体積に対する Mirzakhani 漸化式の一般化が Andersen-Borot-Orantin により提案された (以下, ABO 位相的漸化式とよぶ). また同時期に, Virasoro 束縛条件に対応する一般化が Kontsevich-Soibelman と Andersen-Borot-Chekhov-Orantin による量子エアリー構造として提案された. List of Publications [21] で我々は, これら3つのアプローチ (CEO 位相的漸化式, ABO 位相的漸化式, 量子エアリー構造) を用いて, 2次元 $(2, p)$ ミニマル重力理論 (p は奇数) やその “Masur-Veech 型ツイスト”, およびそれらの超対称類似の研究を行った. 一方, 1980年代から90年代にかけて2次元量子重力理論が “ハミルトン形式” により弦の場の理論や行列模型との関連で研究され大きく進展した. 最近, 藤博之氏, 綿引芳之氏と共同で位相的漸化式の観点からその “ハミルトン形式” との関係について研究を進めている. 位相的漸化式は2次元量子重力理論の摂動論的な定式化を与えるが, “ハミルトン形式” は非摂動論的な定式化を与えられるので, 位相的漸化式を “ハミルトン形式” として再定式化することは興味深い問題である. 今後は, この定式化の研究を進めるとともに, 近年研究されている “非摂動論的な位相的漸化式” との関係についても理解したい.

3次元超対称ゲージ理論と結び目不変量. List of Publications [20] で我々は, 3次元球面 S^3 内の任意の結び目の colored Jones 多項式を3次元超対称ゲージ理論における K 理論的 vortex 分配関数として与えるようなアーベル型ゲージ理論 “knot-gauge theory” を構成した. その構成では, 2015年に Benini-Zaffaroni により超対称局所化の方法で得られた $S^2 \times S^1$ 上の超対称ゲージ理論の A-twisted 分配関数 (twisted index) とその K 理論的 vortex 分配関数への “因子化” を利用した. knot-gauge theory は, “colored Jones 多項式 = K 理論的 vortex 分配関数” という関係を与え, この式の左辺は結び目の連続変形に対する位相幾何学的量子不変量を与える一方で, この式の右辺は vortex を数え上げる代数幾何学的数え上げ不変量と関係する. ただし, 我々の vortex 分配関数の構成は “因子化” を利用した “間接的な” 構成なので, vortex モジュライ空間自体を “直接的に” 構成することは今後の大きな問題である. また, knot-gauge theory は結び目に対するタングル図によりラベルされ, その交点に割り当てられる R 行列に対応して理論の基本構成要素が与えられている. 結び目不変量である colored Jones 多項式はタングル図に対するライデマイスター移動で不変な量として定義され, この不変性は R 行列の性質により保証されるが, 一方でライデマイスター移動により knot-gauge theory は非自明な変換を受けるので, その変換前後のゲージ理論的な関係も今後明らかにすべき問題である. 別の興味深い問題として, colored Jones 多項式の圏化を与える Dunfield-Gukov-Rasmussen による refinement のパラメータ t (homological grading) の R 行列への導入が考えられる. 現在まで任意の結び目に対して, このような refinement を与える結び目不変量のタングル図を用いた明快な計算方法は知られておらず, knot-gauge theory におけるパラメータ t の導入と合わせて本研究で取り組みたい.

非摂動的位相的弦理論と精密化された位相的弦理論. 位相的弦理論において弦の結合定数に関する摂動論を超えた非摂動論的な定式化は重要な問題である. 例えば, CEO 位相的漸化式は局所 toric Calabi-Yau 3-fold 上の位相的弦理論の摂動振幅 (Gromov-Witten 不変量) を与えるが, 近年, その非摂動論的な側面の研究が進展している. また, 精密化された (refined) 位相的弦理論 (位相的弦理論の弦の結合定数の1パラメータ変形) のある極限 (Nekrasov-Shatashvili 極限) が位相的弦理論の非摂動補正と関係することも議論されている. ここで, 精密化された位相的弦理論は上記の colored Jones 多項式の圏化とも関係があることが知られているので, これは位相的弦理論における非摂動論と圏化の間に何か関係があることを示唆している. 非摂動的位相的弦理論と精密化された位相的弦理論はともに未開の数理 (位相幾何学, 代数幾何学, 数え上げ幾何学) を含んでおり, かつ重要だと考えられるので, これらの理解を進めたい. さらに, 位相的弦理論ではブレイン (開弦の端点を束縛するラグランジアン部分多様体を与える境界) の導入により標的空間の量子化が実現されるので, 精密化された位相的弦理論においては標的空間の “二重量子化” が実現されると考えられる. この二重量子化と位相的弦理論の非摂動補正との関係も今後明らかにしたい問題である.