**真鍋 征秀 (Masahide Manabe)**

# これまでの研究成果のまとめ

私は数理物理学の中でも位相的弦理論，行列模型，超対称ゲージ理論に関連するテーマに興味を持って研究を行っている．特に，物理学で導入，発展された様々な計算テクニックを用いて，異なる数学的対象（特に数え上げ幾何学的対象）の間の非自明な関係を探究したり，その計算手法を発展させる研究を行っている．以下，これまでの研究成果の概要をいくつか述べる．文献の番号は別紙の List of Publications の通し番号を表す．

**位相的漸化式.** Chekhov-Eynard-Orantin の CEO 位相的漸化式は，一般にスペクトル曲線 $\Sigma = \{\,(x,y)\in\mathbb{C}^2\,|\,A(x,y)=0\,\}$ に対する Liouville one-form $\omega_1^{(0)}(z)=ydx$ と bidifferential $\omega_2^{(0)}(z_1,z_2)$ から逐次的に "種数 $g$" 多重線形有理型微分 $\omega_h^{(g)}(z_1,\ldots,z_h)$, $h\geq 1$, $g\geq 0$ を定義する．ここで，引数 $z$ は $\Sigma$ の適当な局所座標 $x=x(z), y=y(z)$ である．CEO 位相的漸化式は，行列模型のループ方程式にその起源に持ち，2 次元重力と関連する理論に対して様々な応用をもつ．以下は関連する研究成果の概要である．

- 2007 年頃から 2010 年頃にかけて，あるクラスの局所 toric Calabi-Yau 3-fold (CY3) に対して，ミラー曲線上の $\omega_h^{(g)}(z_1,\ldots,z_h)$ は，ある Lagrangian に対する種数 $g$ の開 Gromov-Witten 不変量を与え，さらに geometric engineering により，これが 4 次元 $\mathcal{N}=2$ $SU(N)$ 超対称ゲージ理論のある型の表面演算子の相関関数を与えると予想された．我々は $SU(2)$ の場合にその詳細を議論した [2,4].
- 2009 年頃に Dijkgraaf-Fuji により 3 次元 $SL(2,\mathbb{C})$ Chern-Simons ゲージ理論における体積予想の位相的弦理論への埋め込みが議論された．この Chern-Simons ゲージ理論の平坦接続のモジュライ空間は $SL(2,\mathbb{C})$-character variety と呼ばれる代数多様体で記述され，特に $S^3$ の結び目補空間に対しては 1 次元代数曲線を与える．我々は CEO 位相的漸化式が結び目に対する colored Jones 多項式の (large color の) 漸近展開を与えることを予想して具体例を用いてそれを検証した [3].
- あるクラスの行列模型は 2 次元の自由場表示を持ち，2 次元共形場理論 (CFT) のある相関関数として記述できる．そのような行列模型の範疇では，CEO 位相的漸化式は行列模型のループ方程式から導出され，ループ方程式は 2 次元 CFT における Virasoro 束縛条件と等価である．我々は，エルミート行列模型のスペクトル曲線に対して，2 次元 CFT における Virasoro 特異ベクトル (無限族) に対する Belavin-Polyakov-Zamolodchikov 微分方程式と対応する "量子 (スペクトル) 曲線" の無限族が，CEO 位相的漸化式で構成できることを詳細に議論した [8]．また，その拡張として，量子曲線の "超対称類似" も議論した [9,13].
- 境界付きリーマン面のモジュライ空間に対する Weil-Petersson 体積は Mirzakhani の漸化式に従う．その一般化として 2017 年頃に Andersen-Borot-Orantin により ABO 位相的漸化式が提案され，Virasoro 束縛条件や CEO 位相的漸化式との関係も議論された．我々は，これらを 2 次元 $(2,p)$ ミニマル重力理論 ($p$ は奇数) とその超対称類似に適用して，その詳細を議論した [21].

**厳密分配関数.** 2007 年頃の Pestun による超対称局所化を用いた $S^4$ 上の $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の分配関数や相関関数の厳密計算を契機として，様々な次元や背景時空における超対称ゲージ理論の分配関数や相関関数の厳密結果が得られた．以下はそれらを応用して得た研究成果の概要である．

- 2012 年に Jockers-Kumar-Lapan-Morrison-Romo は，2 次元球面 $S^2$ 上の $\mathcal{N}=(2,2)$ gauged linear sigma model (GLSM) の分配関数を用いれば，CY 多様体の量子 Kähler モジュライ空間上の Kähler ポテンシャルが厳密に計算できると予想した．我々は，これを CY4 に適用して，CY4 の量子 Kähler モジュライ空間上の Kähler ポテンシャルの厳密公式を予想した [5].
- $S^2$ 上の A-twisted GLSM 分配関数を用いた研究：– 局所 toric CY 上の B 模型 Yukawa 結合の計算 (non-compact 性による twisted mass の系統的な導入方法の提案)[15]；–（複素）Grassmannian の中の determinantal CY 多様体に対する Givental $I$ 関数の計算 [16]；– $\mathfrak{su}(N)$ XXX (XXZ) スピン鎖の off-shell ベーテ波動関数の codimension-2 orbifold defect としての構成 ($\mathfrak{su}(2)$ の場合の先行研究の一般化)[17].
- $S^2\times S^1$ 上の超対称ゲージ理論の A-twisted 分配関数を用いて，3 次元球面 $S^3$ 内の任意の結び目の colored Jones 多項式を 3 次元超対称ゲージ理論の K 理論的 vortex 分配関数として与えるようなアーベル型ゲージ理論 "knot-gauge theory" を提案して具体的な構成を与えた [20].