

これまでの研究成果

松野 皐

接触多様体は接触形式と呼ばれる 1 形式を備えた奇数次元の多様体である。接触多様体の一種である佐々木多様体は数理物理の種々の分野に登場してきた。最も有名な例は AdS/CFT であろう。この他に有名なものとしては、接触形式をゲージ場と見なして定義される磁場の性質を研究する分野である。この磁場は接触磁場と呼ばれる。接触幾何学の一般相対論への応用はいくらか見られるが、接触磁場に注目した研究はあまり見られない。応募者の研究テーマは接触幾何学の一般相対論への応用であり、以下に 2023~2024 年に行った①静的佐々木時空における Einstein-Dirac-Maxwell 系の研究、② 3 次元擬リーマン多様体上での佐々木-準 Killing スピノルの幾何学的性質の研究について述べる。

①静的佐々木時空における Einstein-Dirac-Maxwell 系の研究：佐々木多様体の接触形式をゲージ場と見なした電磁場が接触磁場である。接触形式の双対である Reeb ベクトル場に沿って電流を分布させると、Maxwell 方程式に従ってその電流から生じる磁場が接触磁場であることが分かった。さらにその電流が Reeb ベクトル場に沿って流れる帯電したダスト流体から作られるとした場合には、磁場と物質の混成系の厳密解が構成される。4 次元静的佐々木時空において、先に述べた接触磁場と荷電ダスト流体と重量場の成す Einstein 系の厳密解をも構成することができた*¹。一方、これらの研究では荷電流体を仮定しているが流体はマクロに見た複合物であるためより基本的な場である $U(1)$ ゲージ場と相互作用するスピノル場を使用した Einstein-Dirac-Maxwell 系の厳密解で同様の状況を記述するものが存在することが期待された。EDM 系は一般には非常に複雑であり厳密解の構成は意義がある。我々はこのような EDM 系の解を構成することができた。またこのスピノル場は佐々木-擬 Killing スピノル場と呼ばれる佐々木多様体上に存在する特殊なスピノル場を用いたことも新しい点である。この結果は理論物理の専門雑誌である PTEP に受理された*²。

② 3 次元擬リーマン多様体上での佐々木-準 Killing スピノルの幾何学的性質の研究：佐々木-準 Killing (SqK) スピノルは Killing スピノルの佐々木多様体上の一般化として Friedrich らにより定義された。特に 3 次元佐々木多様体上の SqK スピノルは分類されている。しかしその幾何学的性質や物理的性質は調査されていない。この研究の目的は 3 次元擬リーマン佐々木多様体において SqK スピノルの性質を明らかにすることである。我々の研究により以下のことが明らかにされた。

(i) 特別な SqK スピノルの作る Dirac 電流が Reeb ベクトル場となること

接触構造において重要な Reeb ベクトル場が SqK スピノルで記述されるということは興味深いことである。

(ii) 触磁場中の荷電粒子の運動が SqK スピノルの Dirac 電流により記述されること

このような荷電粒子の運動はこれまでも盛んに研究されてきたが、新しい観点が得られた。

(iii) ほぼすべての SqK スピノルは宇宙項ありの Einstein-Dirac 系の解となり、また特殊な SqK スピノルと接触電磁場は Einstein-Dirac-Maxwell 系の解を構成すること

これらの系は複雑な非線形系であり、厳密解を構成できることは SqK スピノルの物理的な存在意義となり得る。

(iv) SqK スピノルのとあるフレームにおける明示的表示

存在は示されていたが明示的な表示は初めて得られた。

この研究結果は JGRG33 で発表した。また論文*³にまとめ専門誌に投稿中である。

*¹ H.Ishihara,S.Matsuno. PTEP 2022.2 (2022): 023E01.

*² <https://doi.org/10.1093/ptep/ptae098>

*³ arXiv:2308.10432v2