今後の研究計画

森本真弘

1. アフィン対称空間上の平行移動写像

「今までの研究の概要」で述べた通り，平行移動写像は通常，コンパクトなリーマン対称空間 G/K 上において定義される．2004 年頃から小池直之により，非コンパクト型リーマン対称空間上の平行移動写像が，擬リーマン沈めこみの枠組みで研究されている．私は最近，より一般にアフィン対称空間の上において，平行移動写像が計量を用いずに定義され，それが「水平分布つきアフィン沈めこみ」と呼ばれる良い性質を満たすことを示した（準備中論文）．今後はこの結果に基づき，ヒルベルト空間を経由した，対称空間の部分多様体幾何学について更なる研究を行う．特にユークリッド空間のアフィン部分多様体に関する先行研究をヒルベルト空間の場合へ拡張し，それを部分多様体 $\Phi_{G/K}^{-1}(N) \subset V_{\mathfrak{g}}$ に適応することで，アフィン対称空間 G/K 内の部分多様体 N の幾何学を研究する．

2. Hermann 作用の極小軌道一意性について

リーマン多様体へのリー群等長作用が与えられたとき，その軌道で極小部分多様体となるもの（極小軌道）を決定することは重要な問題である．コンパクト対称空間 G/K に対し，そのイソトロピー表現の軌道類の各階層の中に，極小軌道がただ一つ存在することが知られている (Hirohashi-Tasaki-Song-Takagi 2000)．同様の事実は，G/K のイソトロピー作用や，より一般に，可換な Hermann 作用に対しても成り立つことが示されている (Ikawa 2011)．これを更に，可換とは限らない一般の Hermann 作用の場合へ拡張することが本研究の目的である．非可換な Hermann 作用に対して，その軌道空間をルート系により記述することから始め，定理が成り立つ場合にはその証明を，成り立たない場合にはその反例を挙げる．

3. affine Kac-Moody 対称空間のイソトロピー表現の極小軌道

C.-L. Terng により提案され，E. Heintze，B. Popescu，W. Freyn らにより確立された (affine) Kac-Moody 対称空間とは，Kac-Moody 理論に基づく無限次元対称空間であり，有限次元リーマン対称空間と顕著な類似性を持つ．特にそのイソトロピー表現が，Hermann 作用やシグマ作用から誘導される path 群作用で記述できる．本研究では，Kac-Moody 対称空間のイソトロピー表現の極小軌道一意性について研究する．有限次元コンパクト対称空間において，そのイソトロピー表現の軌道類の各階層の中に，極小軌道が唯一つ存在することが知られている．私は，同様の事実が Kac-Moody 対称空間においても成立すると予想する．この予想を検証し，証明することを目標とする．

4. 可積分系理論の affine Kac-Moody 群による再定式化

ソリトン方程式の解空間の対称性が Kac-Moody 代数により記述されることが知られている（柏原正樹-神保道夫-伊達悦朗-三輪哲二 1980s）．他方で，ある種の可積分系方程式の解空間の変換をループ群作用により記述できることが知られている (C.-L. Terng, K. Uhlenbeck 2000s)．(affine) Kac-Moody 群とは，Kac-Moody 代数に対応する群であり，近年の無限次元部分多様体論の発展および Kac-Moody 対称空間論の確立によって，その実態が明らかとなってきた．Kac-Moody 群は，テイム・フレシェ多様体 (Hamilton 1982) の枠組みにおいて，捩れループ群上のトーラス T^2 束として実現可能され，双方の可積分系理論の関係を調べるのに有用であると考えられる．本研究では，上記 2 つの可積分系理論の関係を，Kac-Moody 群を通して明確化することを目標とする．