今後の研究計画

中西敏浩

写像類群はトポロジー，双曲幾何学，低次元多様体論，組合せ群論，力学系，複素関数論など多くの領域で重要な研究対象である。その研究の流れの中から，Nielsen-Thurston 理論のように美しい理論が誕生し，写像類群というテーマは現代数学に大きな進歩をもたらした。写像類群の研究により深い奥行きを与えるのは作用域をセットにして考えたときである，複素解析学が対象とする作用域はリーマン面の変形空間である**タイヒミュラー空間**であり，写像類群はタイヒミュラー空間の正則自己同型群として表出する。

タイヒミュラー空間はさまざまな座標系を許容する。Teichmüller や Bers によるリーマン面の正則 2 次微分を用いた複素解析に適した座標系, Fricke 座標や Fenchel-Nielsen 座標など双曲幾何学に適した座標系など。境界成分 $C_1,..., C_m$ をもつ種数 g のコンパクト向き付け可能曲面 S を考える。C_k が長さ L_k の全測地的境界であるような S 上の双曲計量の空間であるタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_{g,m}(L_1,...,L_m)$ は，$d+1$ 個の閉測地線の長さをパラメータとして $\mathbb{R}^{d+1}$ に埋め込むことができる。$d = 6g-4+3m$ はタイヒミュラー空間の次元 (P.Schmutz 他)。(ちなみにどのように d 個の閉測地線を選んでもそれらの長さでタイヒミュラー空間を $\mathbb{R}^d$ に大域的に埋め込むことはできない。) 私はタイヒミュラー空間に作用する写像類群が閉測地線の長さを用いた関数をパラメータをもちいてどのような表現されるかに興味をもち，閉測地線をうまく選んでそれらの長さをパラメータとする空間 $\mathbb{R}^{d+1}$ に埋め込んだとき，写像類群の元の作用が有理変換で表されることを発見した。この結果により，写像類群やタイヒミュラー空間の研究および派生する 3 次元多様体論，力学系，数論などの諸問題に定量的方法で取り組む手法を得ることができた。このことを背景に以下の計画により研究課題に取り組む計画を立てた。

(1) 写像類群の作用に関する基本領域とモジュライ空間の構成

(2) Weil-Petersson 体積の新たな計算法の研究 (論文番号 11,14 の継続)

(3) Markoff 方程式の整数解をモデルとする不定方程式の整数解の問題

(4) 写像類群の群表示の問題 (論文番号 24 の継続)

(5) 種数 2 の曲面群の $SL(2,\mathbb{C})$ の表現空間への写像類群の作用の研究 (論文番号 26 の継続)

(6) 円周上の曲面束の構造をもつ双曲 3 次元多様体の例の構成 (論文番号 26 の継続)

とくに (6) に力点をおく。写像類群に関する膨大な研究成果が生み出されているが，写像類群やタイヒミュラー空間について具体的な例や定量的な事実は相変わらず乏しいと思われる。私たちは写像類群の有理変換群としての表現を応用して写像類が誘導するクライン群や双曲 3 次元多様体の構成することに興味をもっているが，理論上存在することがわかっていても実例があまり見つかっていない。$SL(2,\mathbb{C})$ の部分群の離散性の判定という克服すべき大きな困難のためであるが，それでも双曲 3 次元多様体の例をいくつか得ることができた (文献番号 26). 今回応募する研究計画は，これまでの過程で得られたさまざまなデータを活かして，写像類群の力学系などに係わる諸問題 (とくに群の離散性の判定) を具体的な計算手続きや数量的な検証を伴う形で取り組み，多くのクライン群の実例を作ることである。この研究は科学研究費補助金基盤研究 (C)「タイヒミュラーモジュラー群の有理変換表現を応用した離散群の研究」に採用されている (令和 6–8 年)