これまでの研究成果

中野 弘夢

$\boxed{\text{研究背景}}$ 頂点作用素代数 (VOA) は, 共形場理論におけるエネルギー・モーメント・テンソル (Virasoro 代数の生成作用素), プライマリー場とその子孫場, 場の作用素積展開等を公理化したものとして導入される. 代数系の理論と同様に, VOA 加群が定義でき, Virasoro 代数のゼロモード L_0 によってそれぞれの加群は広義固有値分解される. 場の作用素積展開は無限個の場のフーリエモードからなるため, VOA 加群の単純性や加群の間の射の性質などを調べるのは一般的には難しくなる.

頂点作用素代数 V と V 加群 M が与えられ, M に作用しているゼロモード L_0 が Jordan block を持つとき, 加群 M を対数的加群と呼び, V を対数的 VOA と呼ぶ. この "対数的" という形容詞は, 共形場理論において, 確定特異点型のホロノミック系の解に log 型の解が現れることに対応する. log 型の解は物理の側では, 高分子, スピン鎖, パーコレーション, サンドパイル模型などの興味深い現象を記述する.

頂点作用素代数の理論では加群のなすアーベル圏の構造やテンソル圏の構造が重要になる. 頂点作用素代数の非対数的加群に対しては, 慣例的に表現の指標を調べて, ベクトル空間やテンソル積の構造を決定する場合が多い. それに対して, 対数的加群の場合, Virasoro のゼロモード L_0 が非半単純に作用するため, 従来の指標を用いた方法では構造の決定が難しくなる. そのため, 対数的頂点作用素代数の加群の研究はより挑戦的なものとなっている.

対数的頂点作用素代数の有名な例として, トリプレット W 代数と呼ばれる頂点作用素代数の族や非ユニタリー $N = 2$ Virasoro 頂点素超代数が挙げられる. 前者は C_2 余有限性と呼ばれるある種の有限性条件を満たす頂点作用素代数であり, 一の冪根における量子群の表現論との関係性が有名である (Feigin *et al.*, $Nucl.\ Phys.B$, 2006 & Adamović and Milas., $Commun.\ Math.\ Phys$, 2009). 後者はプリンシパル W 代数と呼ばれる W 代数の系列に属しており, コセット構成を通して, アフィン sl_2 の頂点作用素代数と結びつく (Creutzig *et al.*, $JHEP$, 2019). 代数系の表現論でテンソル積の既約分解が重要であったように, これらの頂点作用素代数においても, 加群の間のテンソル積 (またはフュージョン積) の構造が物理学の様々な方面から研究され, 理論のさらなる数学的な精密化が期待されている.

$\boxed{\text{研究結果}}$ これまでのトリプレット W 代数や $N = 2$ Virasoro 頂点素超代数の研究で, 頂点作用素に関するある種の変形手法を発見した. これを頂点作用素の ϵ 変形手法と呼ぶことにする. ϵ 変形手法を用いて以下の性質を明らかにした.

(1) Adamović と Milas により導入されたスーパートリプレット W 代数 $\mathcal{SW}(m)$ に対して, 全ての射影加群の構造を決定し, 単純加群と射影加群の間のフュージョン積の構造を決定した. さらに $\mathcal{SW}(m)$ 加群のなすテンソル圏がリジッドであることを証明した (Nakano., arXiv:2412.20898, 2024).

(2) $N = 2$ Virasoro 超代数のウェイト加群の間のフュージョン積の構造を決定し, ウェイト加群がなすテンソル圏がリジットであることを証明した (Nakano, Orosz Hunziker, Ros Camacho and Wood., arXiv:2411.11387, 2024).

(2) に関する結果は, 同時期に Creutzig, McRae, Yang により別の証明方法により達成されている (arXiv:2411.11386).

上に述べた変形手法は, 直観的に言えば, 微小パラメータ ϵ による表現の繰りこみと言える. ϵ 変形手法の重要点を抜き出すと, 以下のようになる.

a 微小パラメータ ϵ を頂点作用素に繰り込むことにより, ボゾンとフェルミオンの自由場を用いた自由場表示の手法を用いることができる.

b そこで, ϵ に関して解析的な評価を行うことにより, VOA の表現論で重要な絡作用素や N 点関数を構成することができる.

この ϵ 変形の手法は, 様々な対数的頂点作用素の理論に応用できると期待される.