（２）今後の研究計画

大野走馬

研究計画の背景

既に「現在までの研究の背景」で述べたように、実キリングスピノールを持つ多様体上で Rarita-Schwinger 場(以下 RS 場)を調べることは重要である。実キリングスピノールを持つ多様体は正のスカラー曲率を持つアインシュタイン多様体で、C. Bär によって分類されていて、佐々木-アインシュタイン多様体、3-佐々木多様体、nearly Kähler 多様体、nearly parallel G_2 多様体のいずれかである。査読付き論文[1]、[2]において nearly Kähler 多様体、nearly parallel G_2 多様体上の RS 場は解明されている。残った佐々木-アインシュタイン多様体、3-佐々木多様体上で RS 場を調べることは、RS 場がそれぞれの多様体上の変形理論への応用を持つと期待されることからも、非常に興味深い。

研究計画

(1) 佐々木-アインシュタイン多様体上で Rarita-Schwinger 場を調べる

最近、U. Semmelmann 氏、C. Wang 氏、M.-Y. Wang 氏らによって佐々木-アインシュタイン多様体の線形安定性についての結果が得られた。アインシュタイン構造の線形安定は、全スカラー曲率というリーマン汎関数の TT 方向への第二変分が負になるとして定義される概念である。さて、彼らの結果は、ベッチ数がある条件を満たすときに佐々木-アインシュタイン多様体が線形不安定になるというものである。手法としては、佐々木多様体上の「よい接続」に対する Laplacian と Levi-Civita 接続に対する Laplacian の差を計算し、調和形式を書き換えることによって線形不安定を確かめるというものである。私は、この手法を佐々木-アインシュタイン多様体上の RS 場を調べることに流用できるのではないかと考えている。具体的には次のようにする予定である。

$2n+1$次元佐々木-アインシュタイン多様体には Reeb ベクトル場と呼ばれる特殊なベクトル場ξが存在する。この Reeb ベクトル場を用いると、接束は$TM = D \oplus \langle \xi \rangle$と分解する。ここで、$D$は$\langle \xi \rangle$の法束で$2n$次元であり、横断的 Kähler 構造が入る。さらにこの横断的 Kähler 構造と実キリングスピノールを用いて、スピン束$S_{1/2}$をある微分形式の空間の和に分解することが出来ることが知られている。従ってスピン 3/2 スピン束$S_{3/2} \subset S_{1/2} \otimes TM$を既約ベクトル束の和に分解することができる。さらに、佐々木-アインシュタイン多様体上には「良い接続」が存在する。私はこの「良い接続」と Levi-Civita 接続に対する捩れ Dirac 作用素及び RS 作用素の間の公式を構築する。これらを用いて、RS 場を計算する。実際に 5 次元佐々木-アインシュタイン多様体上でこの手法を用いて計算を進めている。

(2) 3-佐々木多様体上で Rarita-Schwinger 場を調べる

3-佐々木多様体は佐々木-アインシュタイン多様体の特別な場合である。また、3-佐々木多様体上には佐々木多様体上にはない「良い接続」が存在する。従って(1)の議論を発展させることができると期待している。また、今年度ドイツのシュトゥットガルト大学に 3 週間ほど滞在し、U. Semmelmann 氏とこれらの研究について議論を交わす予定である。

(3) 冪零多様体上で（左不変）Rarita-Schwinger 場を調べる

最近、G. Bazzoni 氏、L. Martin-Merchan 氏、V. Munoz 氏によって、冪零多様体上の調和スピノール及び Dirac 作用素の固有値について調べられた。彼らは、左不変スピノールに作用する Dirac 作用素がきれいな形で書けること、及び次元ごとに分類されている具体的な冪零多様体に対して個別に計算する方法を取っている。この手法は RS 作用素にも応用できると考えている。さらに将来的には、様々なリー群上の（左不変）RS 場を調べることができると期待している。