（これまでの研究成果のまとめ, 岡　宏枝）

力学系理論は自然科学，工学のみならず社会科学，医学などの時間発展する系における非線型現象を，微分方程式や位相幾何学，エルゴード理論など様々な数学の道具を用いて明らかにしようとする分野である．これらの手法は多くは，数理モデルを構築しそれらを様々な手法により解析するもので，これまでにすでに多くの知見が得られている．しかし，近年，生命科学に現れるネットワーク結合力学系は，多くのノードからなる大自由度力学系であり，そのダイナミクスを詳細に理解することは大変難しいと思われる．また，計算機性能の向上により，高次元の変数や多くのパラメータを含む微分方程式のシミュレーションにより得られた数値データや，あるいは，必ずしもモデル方程式等が明らかでない系の実験や観察から得られる大量のデータが蓄積されている．それらのデータを解析し，理解するためには，従来の手法に加え新しい手法が望まれる．

申請者は，博士課程から力学系に関わる研究を継続している。博士論文は、力学系の標準形理論を特異摂動型の常微分方程式に適用し余次元の低い場合の分類を与えた。これらの場合は、van der Pol 方程式や canard で知られる現象を含んであり、一般のベクトル場の場合にユニバーサルな摂動のためにどれだけのパラメータが必要かを示している。それ以降は、常微分方程式の特異摂動を安定多様体などを用いた幾何学的な視点から研究してきた。

最近の 10 年ほどは、位相的方法に精度保証付き数値計算を融合させて力学系の大域的構造を計算機を援用して解析する力学系の位相的計算理論の研究を進めてきた．これは複雑な力学系のダイナミクスの相空間構造の大域的記述を与えようとするもので、本質的な部分を取り出し, できるだけ簡潔な形で表現するという考え方に基づいており, 要素数の多いネットワーク系や画像データの時間発展に対しても有効となると期待される．

力学系の位相的計算理論で用いるアルゴリズムの概略について簡単に述べる．

写像 f によって与えられる力学系の相空間の有限グリッド分割 $\mathcal{G}$ をとり, 各グリッド要素の f による像の精度保証付き計算に基づく外近似と交わるすべてのグリッド要素を対応させることで, グリッド間の組み合わせ多価写像 $\mathcal{F}$ を構成する．

次に, $\mathcal{G}$ を頂点の集合とし, $G \in \mathcal{G}$ に対し, $H \in \mathcal{F}(G)$ のとき, G から H に向かう辺を考えることで, $\mathcal{F}$ を有向グラフとして表す．この有向グラフから, グラフ・アルゴリズムとホモロジー計算などを含む位相的な情報を計算することで, モース分解と各モース集合の Conley 指数が得られ, それを Conley Morse graph という簡明な表現にまとめることで, 元の力学系 f のダイナミクスについての数学的に厳密なさまざまな結果を得ることができる．ある力学系のパラメータ族に対し, その力学系のデータベース化とは, パラメータ空間についてもグリッド分割を行い, 各パラメータグリッドごとに対応する力学系の Conley-Morse graph を計算して, その結果を検索可能な形に集約したものをいう．このような位相的計算方法は cmgraph と呼ぶソフトウェアとして実装できており, 対象とする力学系の不動点や周期解などの個々の軌道の解析を前提とせずに力学系を定義する数理的表現だけからほぼ自動的に計算できる (図 1).

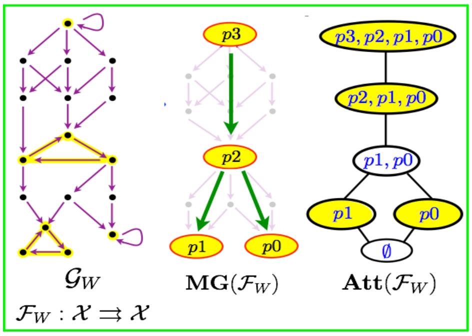

図 1: 多価写像とアトラクタ・ラティス

2024 年度は、”Global Dynamics of Ordinary Differential Equations: Wall Labelings, Conley Complexes, and Ramp Systems” を完成して arXiv(2412.11078) にアップロードした．