これまでの研究成果

岡崎真也

3 次元球面 S^3 に埋め込まれた種数 2 のハンドル体を種数 2 のハンドル体結び目と呼び, H で表す. ふたつのハンドル体結び目が同値であるとは一方が他方に S^3 のアイソトピーでうつることをいう.

ハンドル体結び目 H とそのメリディアン系 M に対して, その d 番目のアレクサンダー多項式を $\Delta^{(d)}_{(H,M)}(t_1,t_2)$ とする. アレクサンダー多項式 $\Delta^{(d)}_{(H,M)}(t_1,t_2)$ は H と M の組の不変量であり, メリディアン系の取り替えはアレクサンダー多項式に $GL(2,\mathbb{Z})$ として作用する.

H をメリディアンディスクで切り開き S^3 内で結ばれた 2 つのソリッドトーラスを得たとする. それを絡み目とみなし, H の内在的絡み目 L という. ハンドル体結び目に対して, このようなメリディアンディスクは無限に存在するので, ハンドル体結び目の内在的絡み目も無限に存在する. 2 成分絡み目 $L = K_1 \cup K_2$ に対して S^3 内に K_1 と K_2 に互いに非交差なザイフェルト曲面がとれるとき, L を境界絡み目という. 特に L に対して S^3 内に K_1 と K_2 を分離する 2 次元球面 S^2 がとれるとき, L を分離絡み目という.

$\Gamma = L \cup c = K_1 \cup K_2 \cup c$ をハンドル体結び目 H を表す手錠型グラフとする. ここで c は Γ のチェインである. m_1 と m_2 をそれぞれ K_1 と K_2 のメリディアンとし, $M = \{m_1, m_2\}$ とする. $\Delta_L(t_1,t_2)$ と $\Delta_{K_i}(t_i)$ をそれぞれ L と K_i のアレクサンダー多項式とするとき, ハンドル体結び目 H の内在的境界絡み目に対して次のような性質が示せた.

定理 1 [O.]
$L = K_1 \cup K_2$ が境界絡み目であるような任意の手錠型グラフ Γ に対して, あるローラン多項式 $p(t_1,t_2) \in \mathbb{Z}[t_1^{\pm1}, t_2^{\pm1}]$ で $p(1,t_2) = p(t_1,1) = 1$ を満たすものが存在して, $\Delta^{(2)}_{(\Gamma,M)}(t_1,t_2) = \Delta^{(2)}_L(t_1,t_2)p(t_1,t_2)$ と表せる. また任意のローラン多項式 $p(t_1,t_2) \in \mathbb{Z}[t_1^{\pm1}, t_2^{\pm1}]$ で $p(1,t_2) = p(t_1,1) = 1$ を満たすものに対して, $\Delta^{(2)}_{(\Gamma,M)}(t_1,t_2) = \Delta^{(2)}_L(t_1,t_2)p(t_1,t_2)$ を満たす手錠型グラフ $\Gamma = L \cup c = K_1 \cup K_2 \cup c$ が具体的に構成できる.

系 2 [O.]
$L = K_1 \cup K_2$ と $L' = K'_1 \cup K'_2$ をハンドル体結び目 H の内在的分離絡み目とする. このとき $\Delta_{K_1}(t) = \Delta_{K'_1}(t)$ かつ $\Delta_{K_2}(t) = \Delta_{K'_2}(t)$ または $\Delta_{K_1}(t) = \Delta_{K'_2}(t)$ かつ $\Delta_{K_2}(t) = \Delta_{K'_1}(t)$ が成り立つ.

これらの結果は種数 n のハンドル体結び目へ一般化できた.