これまでの研究成果のまとめ

大田武志

最近は、ゲージ理論/行列模型対応の観点から、超対称性ゲージ理論と対応する行列模型の性質についての研究を行っている。

(1) ユニタリー行列模型

1. ユニタリー行列模型の一つである Gross-Witten-Wadia 模型は, 行列のサイズ N が無限大の極限で, 三次相転移を起こす模型としてよく知られている. Gross-Witten-Wadia 模型に対数ポテンシャルを加えて一般化したユニタリー行列模型の性質をくわしく調べ, 以下のようなことを明らかにした (Publication List の [38,39,40])。

- 行列模型のスペクトル曲線と, $\mathcal{N}=2$ $SU(2)$ 超対称ゲージ理論で物質場の数が 2 の場合の Seiberg-Witten 曲線が同型である。
- 行列模型の分配関数は, Painlevé III 方程式のタウ関数である。
- この模型の二重スケーリング極限が、ゲージ理論側では Argyres-Douglas 超共形固定点への極限に対応する。

2. 多重臨界ユニタリー行列模型が, $\hat{A}_{2k,2k}$ 理論とよばれる 4 次元 $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論と対応することを示した ([41]). $k=1$ の場合が, 一般化 Gross-Witten-Wadia 模型の場合で, これは上記 1 のゲージ理論/行列模型対応の拡張となっている. われわれは、k 次多重臨界点でのユニタリー行列模型が、$\hat{A}_{2k,2k}$ 理論の (A_1, A_{4k-1}) Argyres-Douglas 固定点と対応することを示した。

3. 上記 2 で取り扱った多重臨界ユニタリー行列模型を、行列のサイズ N が大きい極限で、鞍点法を用いて詳しく調べた。固有値密度関数は、単位円周上にどのようにユニタリー行列の固有値が分布するかを示す関数である。鞍点方程式を解いて、固有値密度関数を求めた。ポテンシャルの形と密度関数から、この模型は 3 つの相をもつことを示した。強結合相が 1 つと弱結合相が 2 つ、合わせて 3 つである。強結合相では、円周上に間隙がない形で固有値が分布する。2 つの弱結合相では、どちらの場合も、固有値が分布しない間隙が一つ円周上に現れる。固有値分布関数を用いて大きい N での自由エネルギーと Wilson ループの具体形を 3 つの相それぞれについて決定した。自由エネルギーを調べることで、強結合相と弱結合相の間の相転移は、3 次相転移であることを明らかにした。また、片方の相転移点は、多重臨界点で、もう一方の相転移点は、通常臨界点であることも示した。多重臨界ユニタリー模型の摂動とその二重スケーリング極限も調べた ([42])。

(2) クイバー行列模型

A_{n-1} 型の β-変形クイバー行列模型において、分配関数のスケーリング極限を調べ、$su(n)$ 型の irregular ブロックの積分表示を得た。そして、対称性が最大となるパラメータ領域を調べ、行列模型のスペクトル曲線と Seiberg-Witten 曲線との対応を通じて、Argyres-Douglas 型の臨界面を定義する条件を得た ([43,44])。