今後の研究計画

斎藤 俊輔

これまでに引き続き偏極代数多様体の標準計量の存在問題や安定性について研究を行う．今後の具体的な研究テーマを 2 つ挙げる．

一様相対 K 安定性・相対 K 不安定性の判定

偏極トーリック多様体の場合, 一様相対 K 安定性は Calabi の端的計量を特徴づける (例えば [3] 参照)．したがって与えられた偏極トーリック多様体の一様相対 K 安定性・相対 K 不安定性を判定することは Calabi の端的計量の存在・非存在を判定することと同じであり微分幾何的にも重要な課題である．今後は 3 次元トーリック Fano 多様体の場合にその (反標準偏極に関する) 安定性を完全に決定することを目指す．3 次元トーリック Fano 多様体は全部で 18 個あり, そのうち 13 個は一様相対 K 安定であることが既にわかっているが残りの 5 つについてはまったくわかっていない．一様相対 K 安定性や相対 K 不安定性の一般的な判定法や, 射影束・ブローアップなど個別の幾何的特徴を踏まえた新しい判定法を発見したいと考えている．また最近 [2] において反標準偏極について相対 K 不安定なトーリック Fano 多様体が 10 以上のすべての次元に存在することが明らかになった．より低い次元に相対 K 不安定な例が存在するかどうかについて特異点がある場合も含めて興味を持っている．

Segre 多様体の超平面切断に関する研究

X を $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ 内の双次数 $(1,1)$ の滑らかな超曲面とする．これは Segre 埋め込みの像 (Segre 多様体) の滑らかな超平面切断でもある．1980 年代に坂根や埴野によって $m \neq n$ のとき X 上の任意の Kähler 類にはスカラー曲率一定 Kähler 計量は存在しないことが証明された．この結果にヒントを得て私は $m \neq n$ の場合に X の二木不変量が任意の有理 Kähler 類について 0 でないことを証明した [4]．ここから自然に「X が Kähler-Ricci ソリトン, 満渕ソリトンや端的計量などの標準計量を許容するか判定せよ」という問題が浮かぶ．まずは X の反標準偏極に関する満渕定数を計算することから取り組む．また「X の δ 不変量を計算せよ」という問題も代数幾何的に興味深い．$m = n$ の場合, X は等質 Kähler-Einstein 計量を許容するが, 「X 上の一般の Kähler 類についてスカラー曲率一定 Kähler 計量が存在するか否かを判定せよ」についても考えていきたい．一方で, 双次数が $(1,1)$ より高い $\mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n$ 内の滑らかな超曲面の場合は $m = n$ であっても Kähler-Einstein 計量を許容するかは一般にはわかっていない ($m = n = 3$ かつ双次数が $(1,2)$ と $(1,3)$ の場合が [1] で扱われているのみである) ため標準計量と安定性の双方の観点から調べたい．

参考文献

[1] J. Cable, Kähler-Einstein metrics on symmetric general arrangement varieties. *Manuscripta Math.* **168** (2022), pp.119–135.

[2] D. S. Hwang, H. Sato, and N. Yotsutani, Toric Fano manifolds that do not admit extremal Kähler metrics. arXiv:2411.17574.

[3] Y. Nitta and S. Saito, A uniform version of the Yau-Tian-Donaldson correspondence for extremal Kähler metrics on polarized toric manifolds. arXiv:2110.10386.

[4] S. Saito, K-instability of hyperplane sections of Segre varieties. arXiv:2407.12412.