今後の研究計画

佐々木真二

1　2階方程式の標準形の理論

これまでの研究の方で述べたように, 二重変わり点の近傍での標準形への変換の Borel 総和可能性の証明方法を応用することで, 様々な標準形への変換の Borel 総和可能性を示せる ([1]). これによって 2 階方程式の標準形の理論はほぼ完成したと言っても良いが, いわゆる ghost 点の近傍での変換, 単純変わり点の 3 つ以上の組の近傍での変換, などやや特殊な問題が残っており, これらの問題を解決したい.

2　Painlevè 方程式の完全 WKB 解析の基礎付け

Painlevè 方程式の完全 WKB 解析は青木, 河合, 竹井らによって精力的に研究され, 多くの興味深い結果がある. しかしそこに現れる形式解にしても形式的変換論にしても, その解析的基礎付けを待つ状況である.

形式的変換論については, 線形方程式の変換論 (上述の標準形の理論) の発展によってボレル総和可能性を確立する目処が立ってきており, この問題の完全な解決を目指す. また形式解については, いわゆる 0 パラメーター解 (形式べき級数解) や 1 パラメーター解 (transseries 解) については解析的な意味付け (総和可能性) が知られているが, 最も一般的である 2 パラメーター解の解析的意味付けは未解決である. この問題については最も簡単である Painlevè I 型方程式の場合に総和可能性が得られつつあり, 一般的に総和可能性を得ることを目指す. さらには, 総和によって得られる解析的な解と, 古典的に知られている解の漸近的楕円関数的な挙動を結びつけることも目標である.

高階 Painlevè の場合には, 形式解の総和可能性は下述の高階線形方程式の場合以上に難しい問題となるが, 形式的変換論については 2 階線形方程式の変換論の延長上で扱えると思われる方程式もある. 形式的変換論の基礎付けについては, そのような高階 Painlevè 方程式も扱うことも目標としている.

3　高階線形方程式の WKB 解の Borel 総和可能性, 標準形の理論

高階線形方程式の完全 WKB 解析は近年, 幾何学や数理物理学といった分野でも現れるようになっており, WKB 解の Borel 総和可能性をはじめとした基礎的問題の解決がより望まれるようになってきている. そして私自身のここ数年の主テーマとして, 高階方程式の WKB 解の Borel 総和可能性を掲げて研究してきた.

しかし, これは問題の重要性・困難性が認識されてから約 40 年未解決の極めて難しい問題であり, 私自身も大きな進展を得ることができなかった. したがって当面は研究の副テーマの一つとして扱い, 完全最急降下法による実例の解析といった知見集めを粘り強く続けつつ, 将来的な解決を目指す. さらにその先には, 高階方程式における標準形の理論 (主に変換の Borel 総和可能性) を見据えている. これもまた, 高階方程式における Stokes 現象の解析や二重変わり点における分岐現象の解析といった自身の過去の研究の自然な後続である.