これまでの研究

佐々木真二

私の研究テーマは, 完全 WKB 解析という, 特異摂動型微分方程式の漸近解析の一種である．特にその基礎的な問題である,WKB 解 (特異摂動パラメータについての形式的べき級数解) のボレル総和可能性 (発散級数の一種の意味付けの問題) やストークス現象の解明に取り組んできた．それに付随して, ストークスグラフの分類や標準形への変換論のボレル総和可能性といった問題を解決してきた．また, そういった基礎的な問題以外にも、完全 WKB 解析の物理への応用にも興味を持って、いくつか仕事をしてきた.

具体的には, [9] において, リーマン球面上フックス型の 2 階方程式のストークスグラフの分類について研究した．ストークスグラフが持ついくつかの性質がストークスグラフを特徴づけると予想されていたが, それを一般に証明した．そしてストークスグラフを頂点の少ないものから順に生成していくアルゴリズムを開発してストークスグラフを数え上げ, その結果得られる数列から他分野との関連を発見した．また, その過程でストークスグラフの性質の従来の証明の誤りを発見し, 修正した.

標準形への変換論では, 二重変わり点の近傍において方程式をその標準形 (退化ウェーバー方程式) に変換する形式級数のボレル総和可能性を証明した ([3])．これにより, 例えば二重変わり点に関係した解の接続公式の証明が与えられたことになる ([2])．また, この証明法を応用することで他種の変換級数 (例えば複数の単純変わり点がかかわるもの) のボレル総和可能性も同様に示される; 一つの変わり点近傍における標準系の理論は, 微分方程式の独立変数が動く時のストークス現象に関係する一方で, 複数の変わり点近傍における標準形の理論は方程式のパラメータが変化する時のストークス現象に関係し, どちらも重要であるが, 後者におけるボレル総和可能性が統一的に示されるようになった ([1], 関連 [8])。

WKB 解のボレル総和可能性とストークス現象は表裏一体のものであるが, 高階方程式の解のボレル総和可能性という非常に難しい問題の解決へ向けた研究として, 具体的な高階方程式の (特異摂動パラメータでない別のパラメータについての) ストークス現象を解析し, そのストークス現象 (接続公式) を明示的に書き下し, 同時により一般的なストークス現象の解析への道具立てを揃えた ([5]).

また, ある多変数ホロノミック系の制限として得られる高階方程式に現れる, 非遺伝性といわれる二重変わり点のストークス現象について, 最急降下法やその一般化である完全最急降下法によって解析した ([4,10]).

こういった問題たちと関係した物理の問題として, 多準位系の非断熱遷移の問題を完全 WKB 解析によって研究した ([6, 7]): 先行研究では, ある設定のもので高階方程式特有のいわゆる新しいストークス曲線 (以下 NSC と書く) が遷移確率の計算に効かない, ということが示されており, また別の先行研究では以前に排除されていた退化した場合を複素の摂動をかけて調べ, その場合には NSC が遷移確率の計算に効きうるということが示唆されていた．私はさらに別の例を調べ, NSC の遷移確率への影響がいかなる意味でも (たとえ数値的・近似的な意味でも) 無視できなくなることを示した．また, その過程で遭遇した, 二重変わり点におけるストークス曲線の分岐現象についても解析し, 分岐の前後でのストークス係数の変化を明示的に明らかにした.