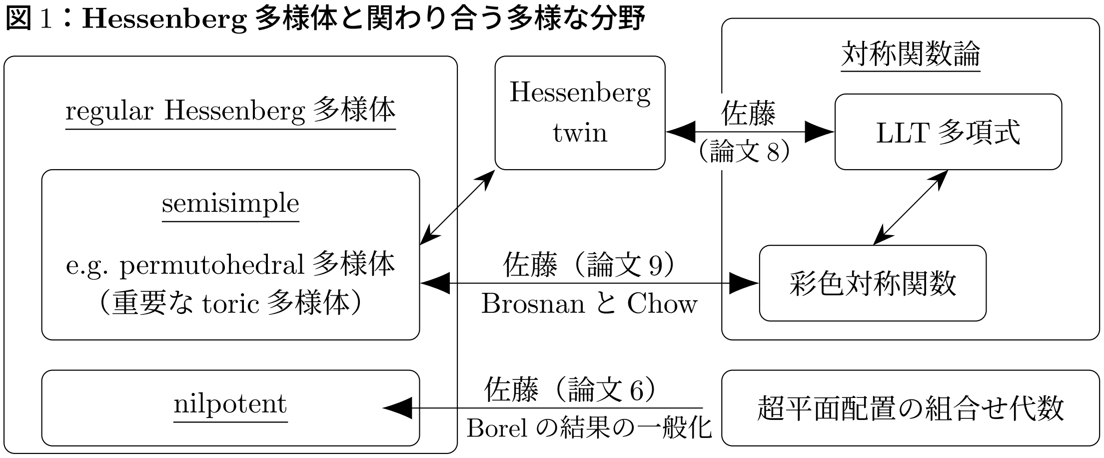
これまでの研究成果

佐藤 敬志

(1) 研究対象

旗多様体は、その Weyl 群やルート系のもつ対称性の幾何学的な化身と呼ぶべき重要な variety である。**Hessenberg 多様体**とは、旗多様体の良い subvariety の族であり、旗多様体の対称性をある意味で崩して得られるものである。Hessenberg 多様体は、旗多様体を見るだけでは分からない対称性の外側の視点から、**対称性を幾何学的に調べる**方法を提供する。私は近年この Hessenberg 多様体について研究しており、対称性に関わりのある多様な分野（特に組合せ論や表現論）と幾何学の関係性を明らかにしてきた。（図 1 の水平方向の矢印を参照）

図 1：Hessenberg 多様体と関わり合う多様な分野



(2) 研究成果

私の近年の最も重要な結果である図 1 の平行四辺形について、まずは説明したい。Regular semisimple と呼ばれるタイプかつ A 型（この条件を以降 $(*)$ で表す）の Hessenberg 多様体のコホモロジーには対称群が作用しており、これを次数付き表現と見ることができる。その表現が、対応するグラフの彩色対称関数と呼ばれる重要な対称関数と (involution 込みで) 一致することが知られている。この事実 (Brosnan と Chow による) は幾何と組合せ論・表現論を結びつける重要なものである。私はこの事実の簡明な別証明を得た（論文リストの論文 9 を参照）。

ここでもう 1 種類の重要な対称関数を紹介する。それは LLT 多項式と呼ばれる対称関数で、物理的な応用があることで知られている。また、$(*)$ の Hessenberg 多様体にはその "双子" と呼ばれる多様体が存在する。私は、Hessenberg 多様体とその双子の関係性が、彩色対称関数と (unicellular) LLT 多項式の関係性と完全に平行であることを発見し、図 1 の平行四辺形を確立した（論文 8）。結果として、双子のコホモロジーが (unicellular) LLT 多項式と一致することを示した。元々は個別に研究されてきた 4 つの対象がなす見事な対応関係を明らかにした。

また、$(*)$ の場合に、コホモロジー環が 2 次の元で生成されるときの特徴付けを与え (論文 7, 11)、生成元と関係式を明示的に決定した（執筆中）。

また、regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環を対応する超平面配置に付随する組合せ代数を経由することで記述した（論文 6）。これは旗多様体に関する Borel の結果の一般化である。

さらに旗多様体が C, F_4, E_6 型の場合に、その整係数同変コホモロジー環の生成元と関係式の明示的な記述を決定した（論文 2, 3, 10）。

上記の研究には GKM 理論と呼ばれる、良いトーラス作用がある空間のコホモロジーをラベル付きグラフから調べる理論を用いた。その空間が概複素構造を持つ場合に、空間の自己同型群がラベル付きグラフの自己同型群の部分群であることを示し、GKM 理論に新たな応用をもたらした。（論文 12）